

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

MATEMATIKA A ORIGAMI

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

MATEMATIKA A ORIGAMI

Bakalárska práca

Študijný program:	Matematika – Britské a americké štúdiá
Študijný odbor:	V kombinácii štud. odboru 9.1.1. matematika a štud. odboru 2.1.29. neslovanské jazyky a literatúra
Školiace pracovisko:	Ústav matematických vied
Vedúci záverečnej práce:	RNDr. Martina Hančová, PhD.

Košice 2010

Adela KUPKOVÁ

Abstrakt

Origami (skladanie papiera) sa všeobecne vníma ako forma umenia. Zámerom bakalárskej práce na tému *Matematika a origami* je ukázať skladanie papiera ako formu realizácie matematiky. V rámci tohto zámeru bolo hlavným cieľom zbierať námety ako skladaním papiera demonštrovať postupy a výsledky školskej matematiky. Text práce je rozčlenený na úvod, tri kapitoly, záver a prílohu. V prvej kapitole možno nájsť stručnú históriu origami ako formy umenia a úvodný materiál k origami ako forme vedy (matematiky) – axiómy, predstavujúce elementárne, ireducibilné operácie skladania papiera a matematické vlastnosti obrazcov tvorených záhybmi na hárku papiera získanom rozložením plochého origami modelu. Druhá kapitola demonštruje užitočnosť teoretických poznatkov o skladaní papiera na príkladoch z inžinierskej praxe kde sa tieto znalosti uplatnili. Tretia kapitola ponúka niekoľko didakticky využiteľných námetov. Uvádza sa v nej, ako skladaním papiera zostrojiť parabolu, ako nájsť reálne korene kvadratickej a kubickej rovnice, ako rozdeliť hárk papiera na nepárny počet zhodných častí, ako zdvojiť kocku. Príloha obsahuje stručnú informáciu o programe GeoGebra, vhodnom na modelovanie skladania papiera na počítači..

Kľúčové slová: Origami, GeoGebra, parabola, kvadratická rovnica

Abstract

Origami (paper folding) is commonly considered to be a form of art. The objective of the bachelor thesis entitled *Mathematics and Origami* is to present the paper folding as a realization of mathematics. Within this framework, the main aim was to collect the examples of how the paper folding can introduce the results of school mathematics. The thesis is divided into introduction, three chapters, conclusion and appendix. In the first chapter, one can find a brief history of the origami as a form of art and an introductory material concerning the origami as a form of science – axioms, representing basic irreducible paper-folding operations, and properties of the pattern of creases found on a sheet of paper when a flat origami is completely unfolded. In the second chapter, the usefulness of knowledge on paper folding is demonstrated by a wide range of applications in practice. The third chapter provides several examples that can be used in the classroom. There is presented how to construct a parabola by folding a paper, how to find real roots of quadratic and cubic equations, how to fold a sheet of paper into an odd number of equal pieces, how to double a cube. An appendix contains a brief information on the programme GeoGebra, which is suitable for modeling the paper folding on a computer.

Key words: Origami, GeoGebra, parabola, quadratic equation

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som celú diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Košice, 30.4.2010

.....

vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcej mojej bakalárskej práce, RNDr. Martine Hančovej, PhD., za pripomienky a odbornú pomoc pri vypracovaní práce.

Obsah

Zoznam obrázkov	9
Úvod	10
1 Čo je origami?	12
1.1 História origami	12
1.2 Prenikanie matematiky do origami	15
2 Využitie origami v praxi	21
2.1 Origami v strojárstve	21
2.2 Origami v automobilovom priemysle	22
2.3 Origami vo vesmírnom výskume	23
2.4 Origami v medicíne	25
2.5 DNA – origami	26
3 Origami v pedagogike	28
3.1 Konštrukcia paraboly skladaním papiera	29
3.1.1 Konštrukcia	30
3.1.2 Simulácia skladania papiera	34
3.1.3 Analytické vyjadrenie	36
3.1.4 Riešenie kvadratickej rovnice	38
3.2 Riešenie kubickej rovnice ohýbaním papiera	42
3.3 Delenie úsečky na časti	44
Záver	49
Zoznam použitej literatúry	52
Prílohy	54
Príloha A: GeoGebra	55
Informácie o GeoGebre	55
Inštalácia GeoGebry	55
Uloženie sprievodných súborov	56
Užívateľské rozhranie v GeoGebre	56
Základné využitie nástrojov	57

Zoznam obrázkov

Obr. 1	Vľavo: ohyb <i>Hora</i> , vpravo: ohyb <i>Údolie</i>	14
Obr. 2	Dvoj – zafarbiteľnosť záhybového vzoru	18
Obr. 3	Počítanie záhybov hora a údolie	19
Obr. 4	Počítanie uhlov okolo vrcholu	19
Obr. 5	Schémy prijateľných usporiadaní vrstiev	20
Obr. 6	Skladané jadro.....	22
Obr. 7	Počítačová simulácia nafúknutého airbagu.....	23
Obr. 8	Prototyp EyeGlass s Robertom Langom v popredí	25
Obr. 9	Umiestnenie stentu v upchatej artérii.....	26
Obr. 10	DNA – origami v podobe nanokrabičky	27
Obr. 11	Zloženie trojuholníka na obdĺžnik	28
Obr. 12	Parabola 1	30
Obr. 13	Parabola 2	30
Obr. 14	Parabola 3	31
Obr. 15	Parabola 4	31
Obr. 16	Parabola 5	32
Obr. 17	Parabola 6	33
Obr. 18	Parabola 7	34
Obr. 19	Začiatok simulácie v programe GeoGebra	35
Obr. 20	Simulácia v programe GeoGebra s viacerými priamkami.....	35
Obr. 21	Hotová parabola vytvorená v GeoGebre.....	36
Obr. 22	Kvadratická rovnica 1.....	39
Obr. 23	Kvadratická rovnica 2.....	40
Obr. 24	Kvadratická rovnica 3.....	41
Obr. 25	Kvadratická rovnica 4.....	41
Obr. 26	Delenie štvorca na nepárny počet zhodných častí	45
Obr. 27	Fujimotova metóda delenia úsečky na pätiny	46
Obr. 28	Užívateľské rozhranie GeoGebry s popisom	57
Obr. 29	Ukážka nástrojov v GeoGebre	58

Úvod

Čo počujem, to zabudnem. Čo vidím, to si pamätám.

Čo si vyskúšam, tomu rozumiem.

Konfucius¹

Origami, zhe-zhi, papiroflexia, papierfalten – slová rôznych jazykov pre jedno a to isté – pre skladanie papiera. Nechápe sa tým však skladanie náhodné a bezmyšlienkovité, ale cieľavedomé vytváranie viac alebo menej realistických modelov živočíchov, rastlín alebo vecí skladaním jediného kusu papiera, väčšinou bez strihania a lepenia. Ide o starobylú formu umenia, ktorú považujú za súčasť svojej kultúrnej tradície nielen Japonci, ale i Číňania, Španieli či Nemci. V súčasnosti sa pre túto činnosť zaužíval prvý, japonský výraz.

Ak vyslovíme „origami“, v ľudoch to vďaka beletrii a kinematografii zvyčajne vyvolá predstavu malých papierových žeriavov *orizuru* – symbolov nádeje, šťastia, mieru a priateľstva. Len málokto postrehne hlboký vzťah medzi origami a tradičnou geometriou a v skladaní papiera vidí konkrétnu realizáciu abstraktných matematických operácií. Avšak práve toto spojenie origami s geometriou či matematikou všeobecne je to, čo nás bude v ďalšom zaujímať.

Spájanie origami a matematiky začalo podľa všetkého malou knihou *Geometric Exercises in Paper Folding* napísanou indickým učiteľom matematiky Sundarom Rowom a vydanou roku 1893 v Madrase. Podľa autora hárok papiera predstavuje časť roviny. Jeho preložením vznikne záhyb, na ktorý sa môžeme pozeráť ako na model úsečky (priamky). Bod vymodelujeme ako prienik dvoch záhybov. Takýmto spôsobom možno pomocou skladania papiera demonštrovať prakticky všetky konštrukcie klasickej euklidovskej geometrie v rovine.

Po tomto „impulze z praxe“ sa matematika skladania papiera začala rýchlo a pomerne autonómne rozvíjať. To znamená, začala si vytyčovať svoje vlastné problémy vyvierajúce z jej vnútorných potrieb. Origami geometria postupne nadobudla axiomatickú štruktúru analogickú Euklidovej geometrii. Ukázalo sa, že sústava origami

¹ Výrok pripisovaný čínskemu mysliteľovi a politikovi Konfuciovi (552/551 p.n.l. – 479 p.n.l.) [citaty.net; www.quotes.net; ...]

axióm je „výkonnejšia“ než tá Euklidova. Skladaním papiera možno preto riešiť úlohy, ktoré sú nad sily klasickej euklidovskej geometrie (trisekcia uhla, zdvojenie kocky). Po úspechoch v geometrii origami postupne preniklo i do ďalších oblastí klasickej matematiky (teória čísel, kombinatorika, algebra, ...).

V oblasti dizajnu sa veľa času venovalo a stále venuje skúmaniu záhybových vzorov konkrétnych modelov, keďže v nich je zakódovaný konečný vzhlád origami figúrky. Záhybový vzor je obrazec, ktorý tvoria záhyby na hárku papiera pri opatrnom rozložení toho ktorého modelu. Pravdepodobne najintenzívnejšie a najrozsiahlejšie študovaným problémom je otázka „zložiteľnosti naplocho“. Hľadajú sa nutné a postačujúce vlastnosti záhybového vzoru, aby z neho bolo možné podľa predpísaných záhybov poskladať síce viacvrstvový no planárny model. Poznatky získané pri tomto štúdiu si postupne nachádzajú cestu i do praxe. Skúsenosti so „zložiteľnosťou naplocho“ sa uplatnili pri navrhovaní airbagov do automobilov, pri skladaní solárnych panelov satelitov, a podobne.

Oblasťou, ktorá môže z origami dosť profitovať, je vzdelávací proces. Skladanie papiera predstavuje jednu z nádejných ciest, ako urobiť vyučovanie matematiky zaujímavejším, ako doň vniesť prvok názornosti, samostatného objavovania, aktívnej skúsenosti. Je priam predurčené na to, aby bolo použité pri spôsobe výučby charakterizovanom ako učenie sa činnosťou – „čo si vyskúšam, tomu rozumiem“. Americký matematik Thomas Hull v knihe *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics* tvrdí, že poskladaný kus papiera môže pre študentov predstavovať experimentálne laboratórium. Samostatným vyhľadávaním zaujímavých problémov, aktívnym skúmaním ako veci fungujú a snahou prísť na to prečo tak fungujú, sa študenti môžu dopracovať k tomu, že „Matematika prestáva byť abstraktnou entitou, existujúcou len v ich mysli. Stáva sa hmatateľnou, niečím, čo môžu držať vo svojej ruke, spočítať to alebo použiť na získavanie poznatkov ktoré dajú vzniknúť modelom, domnienkam a teorémam.“[1]

Záujem o didaktický potenciál origami dal vzniknúť i tejto práci. Bakalárska práca sa venuje matematike skladania papiera s dôrazom na možné využitie získaných poznatkov a zručností pri vyučovaní matematiky. Úlohou je rámcovo sa zoznámiť s matematikou obsiahnutou v origami, zozbierať motivačné príklady z praxe a sústrediť námety použiteľné pri vyučovaní matematiky. Zozbieranie vhodných námetov predstavuje hlavný cieľ práce.

1 Čo je origami?

Slovo origami pochádza z japonského slova *oru*, čo znamená ohýbať, a *kami*, čo znamená papier. Doslovne teda slovo origami znamená ohýbanie papiera. Cieľom je vytvoriť rôzne väčšinou trojrozmerné objekty ohýbaním jediného kusa papiera bez použitia rezania či lepenia.

Jedinou potrebnou pomôckou na skladanie origami je hárok papiera, čo z tejto činnosti robí jedno z najdostupnejších umení [2]. Origami využíva rôzne druhy papiera, ale aj iné, nepapierové materiály na najrozličnejšie účely.

Dokončená origami postavička sa nazýva *model*, metóda skladania modelu sa nazýva *dizajn* a kreslený návod na model sa nazýva *záhybový vzor*. Umelec origami sa väčšinou nazýva *ohýbač papiera* [3].

Ohýbači papiera predstavujú pestrú skupinu ľudí rôznych profesií, od umelcov cez vedcov až po terapeutov. Umelci a remeselníci chápu origami ako spôsob kreatívnej sebarealizácie. Vedci, architekti a matematici skúmajú geometriu origami kvôli jej vnútornej kráse i kvôli praktickým aplikáciám [2]. Učiteľom v školách slúži origami na spestrenie a zatraktívnenie výučby predmetov, napríklad geometrie, fyziky či orientálnej kultúry. Fyzioterapeuti pomocou origami dosahujú u pacientov väčšiu silu v ruke a zdokonalenie jemnej motoriky. Psychoterapeuti ho používajú na to, aby pomocou neho svojich klientov naučili relaxačné techniky a prelomili ľady u tých, čo nie sú ochotní spolupracovať [3]. Mnoho ľudí však skladá papier jednoducho pre zábavu [2].

1.1 História origami

Tradícia origami vznikla pravdepodobne pred 600 rokmi v Japonsku počas obdobia *Muromači*. Samuraji vtedy balili oficiálne dary, napríklad džbány na ryžové víno, do umeleckých papierových obalov [4].

Papierové skladačky sa v Japonsku používali aj pri náboženských obradoch a pri výzdobe šintoistických svätýň. Papierové retiazky poskladané podľa presných pravidiel sa vešali s trsmi slamy na "výstražných" šnúrach *šimenawa*, ktoré označujú hranicu posvätného územia svätyne, za ktorú smie vstúpiť len kňaz [5]. Slovo *kami*, ktoré označuje papier, je vlastne homonymom pre ducha alebo boha. Vzory, ktoré sa spájajú so šintoistickými ceremóniami zostali počas storočí nezmenené [2].

Ako zábava sa začali papierové skladačky v Japonsku šíriť až niekedy v 17. storočí [5]. V tomto čase ľudia vyvinuli jednoduchšie metódy výroby papiera a tým pádom papier zlacnel. Origami sa stalo populárnym umením pre každého bez ohľadu na to, či bol chudobný alebo bohatý [7].

Spôsoby skladania najstarších origami si Japonci predávali ústnou tradíciou z jednej generácie na druhú. Pretože si tieto pokyny nikdy nezapisovali, zachovali sa len najjednoduchšie tvary. Prvé písomné pokyny sa objavili roku 1797 nášho letopočtu v publikácii *Senbazuru Orikata* (Skladanie tisícich žeriavov).

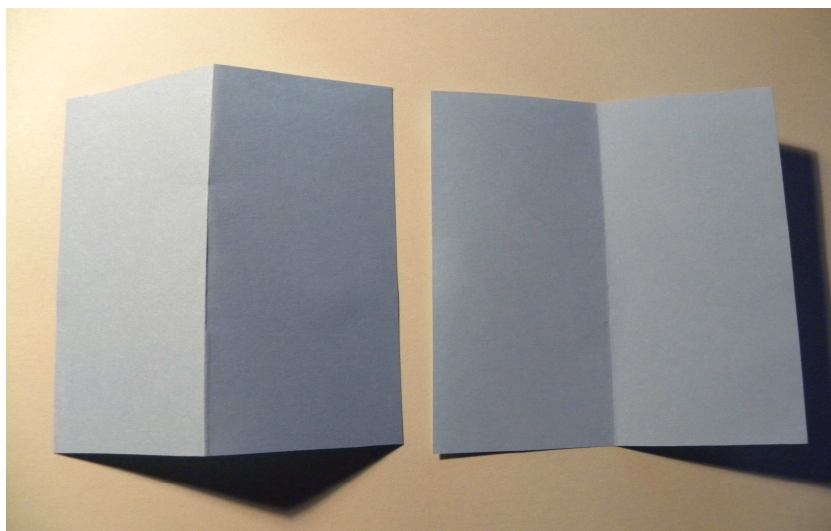
Origami však nevzniklo len v Ázii. Objavilo sa aj v Španielsku a podľa všetkého nezávisle od toho japonského. Predpokladá sa, že do Španielska sa tajomstvo skladania papiera dostalo prostredníctvom Arabov. Tí sa ho naučili v ôsmom storočí a do Španielska ho priniesli v 12. storočí [2]. V 30. rokoch 19. storočia tvorilo toto umenie v Nemecku dokonca základ výchovnej koncepcie v materských školách, čo malo u detí podporovať schopnosť sústrediť sa [4].

V súčasnej dobe existujú dva druhy origami: tradičné a moderné. Tieto dva typy sa od seba značne líšia [5].

Tradičné origami sa narodilo a vyrástlo v kultúrnej výmene medzi východom a západom. Nie je teda originálnym plodom japonskej kultúry ale hybridom Japonska a Európy [8].

Pre tradičné origami je typické, že sa skladá vždy iba z jedného kusa papiera, bez použitia nožníc, lepidla a pod. Taktiež sa nepoužíva ďalšie zdobenie, ako je napríklad primal'ovanie očí [5].

Základnou technikou origami je ohýbanie. Najjednoduchší ohyb je ohyb *Údolie*, kde sa rovný kus papiera skladá smerom k ohýbačovi papiera. Keď sa tento ohyb narovná, záhyb pripomína tvar údolia. S týmto ohybom úzko súvisí ohyb *Hora*, kde sa papier ohýba smerom od ohýbača papiera. Tento záhyb tvorí vyvýšenú brázdú alebo tvar hory.



Obr. 1 Vľavo: ohyb *Hora*, vpravo: ohyb *Údolie*

Určité kombinácie základných ohybov tvoria bázu, to jest akýsi medziprodukt, ktorý sa dá použiť na zloženie mnohých rôznych modelov [2]. Postup ich skladania býva veľmi prísne predpísaný, takže výsledky by sa od seba nemali veľmi líšiť nech ich zloží ktokoľvek.

V tradičnom origami sa modely predávajú z generácie na generáciu a často menia svoje tvary a názvy [8]. Autor týchto origami nie je nikdy známy, tradičné origami sú teda anonymné.

V modernom origami je značný priestor ponechaný vlastnej fantázii ohýbača. Autori japonských príručiek pritom zdôrazňujú, že je hlavné nechať sa „viesť srdcom“ [5]. V modernom origami môžeme rozlíšiť dva smery: matematické origami a umelecké origami.

Tvorcovia umeleckého origami sa snažia dostať z papiera všetko, čo je potenciálne možné. Kreativita sa tu pripisuje obom, ako dizajnérom tak aj ohýbačom, a ohodnotenie sa prenecháva divákovi. Sekvencie skladania alebo záhybové vzory samé o sebe nie sú predmetom hodnotenia. Navyše v umeleckom origami neexistuje reprodukovateľnosť, pretože tá istá sekvencia vytvorí rôzne diela z rôznych typov papiera alebo od rôznych ohýbačov.

V matematickom origami sa zdôrazňuje aspekt origami ako skladačky, ktorá reprodukuje tvary predmetov podľa istých pravidiel. Takto sa papier redukuje na súbor obyčajných geometrických tvarov ako štvorec alebo mnohouholník a sklady sa chápu ako obyčajné geometrické manipulácie [8].

Odhalenie matematických princípov origami však umožnilo zapojiť do navrhovania nových modelov výpočtovú techniku. Výsledkom sú modely, na poskladanie ktorých síce potrebujeme niekoľko stoviek zložení papiera, no ich realizácia bola pred niekoľkými rokmi považovaná za nemožnú.

1.2 Prenikanie matematiky do origami

Možno povedať, že z historického hľadiska spájanie origami a matematiky začalo knihou „Geometric Exercises in Paper Folding“, ktorú napísal indický učiteľ matematiky Tandalam Sundara Row [9]. Prvýkrát vyšla roku 1893 v Indii, no prelom znamenalo až jej vydanie v USA roku 1901. Sundara Row v knihe predložil novú a veľmi jednoduchú metódu realizácie mnohých geometrických konštrukcií. Namiesto klasického rysovania priamok a kružníc použil ohýbanie papiera. Hárok papiera pritom slúži ako model euklidovskej roviny. Priamku predstavuje záhyb, ktorý vznikne keď hárok papiera preložíme, pritlačíme a znovu otvoríme. Ako model bodu slúži prienik dvoch záhybov. Záhybový vzor (obrazec, ktorý vytvoria záhyby na hárku papiera) možno porovnať s inými tradičnými dvojrozmernými geometrickými konštrukciami. Sundara Row ukazuje, ako pomocou ohýbania papiera konštruovať rôzne geometrické obrazce a „po bodoch“ dokonca krivky ako parabola, elipsa a pod.

Záujem o ohýbanie papiera ako novú metódu geometrických konštrukcií postupne narastal a rozširovalo sa porovnávanie tejto metódy s klasickou metódou konštrukcie pomocou pravítka a kružidla. Začalo sa študovať spojenie medzi geometriou ohýbania papiera a klasickou Euklidovou geometriou.

Euklidovská geometria je známa svojou axiomatickou výstavbou. To znamená, že na začiatok musíme vybrať skupinu základných (primitívnych) pojmov a vysloviť niekoľko intuitívne platných výrokov – axióm. Tvrdenia obsiahnuté v axiómach nedokazujeme, prijímame ich za pravdivé zvyčajne na základe skúsenosti, názoru, súhlasu so skutočnosťou a pod. Ale ďalej už postupujeme prísne logickou cestou a systémom „veta (tvrdenie) – dôkaz“ sa dostávame k stále zložitejším pojmom a konštrukciám.

V analógii s Euklidovou geometriou sa ľudia snažili extrahovať základné jednotkové operácie pri ohýbaní papiera. Opakovaním a kombinovaním týchto operácií by bolo možné vytvoriť i tie najkomplikovanejšie záhybové vzory.

Najpopulárnejším z existujúcich systémov fundamentálnych operácií je sústava siedmich takzvaných Huzitových – Hatoriho axiém. Ide v podstate o sedem rôznych spôsobov ako k už existujúcej množine bodov a záhybov na hárku papiera pridať nový záhyb. Operácie sa odlišujú tým, aké prvky na seba ľahnú pri ohnutí papiera pri tvorbe nového záhybu (bod na bod a/alebo záhyb na záhyb, atď.). Robert J. Lang² [10] ukázal, že systém Huzitových – Hatoriho axiém je úplný, to jest popisuje všetko čo možno pridaním jediného priameho záhybu pri ohýbaní papiera urobiť.

V dostupnej literatúre (napr. [10], [11], [12]) sú Huzitove – Hatoriho axiémy z formálneho hľadiska rôzne formulované. Predkladaný preklad predstavuje snahu vystihnúť podstatu týchto axiém ako opisu fundamentálnych operácií:

- **Axióma 1)** Ak sú dané dva rôzne body P_1 a P_2 , potom môžeme papier ohnúť tak, aby novovytvorený záhyb prechádzal bodmi P_1 a P_2 .
- **Axióma 2)** Ak sú dané dva rôzne body P_1 a P_2 , potom môžeme papier ohnúť tak, aby bod P_1 ľahol na bod P_2 .
- **Axióma 3)** Ak sú dané dva záhyby c_1 a c_2 , potom môžeme papier ohnúť tak, aby záhyb c_1 ľahol na záhyb c_2 .
- **Axióma 4)** Ak je daný záhyb c a bod P , ktorý na c neleží, potom môžeme papier ohnúť tak, aby novovytvorený záhyb prechádzal bodom P a bol kolmý na záhyb c .
- **Axióma 5)** Sú dané dva body P_1 , P_2 a záhyb c , pričom P_1 a P_2 neležia na c . Potom, kedykoľvek to vzájomná poloha bodov P_1 a P_2 a záhybu c dovoľuje, môžeme papier ohnúť tak, že novovytvorený záhyb prechádza bodom P_1 a bod P_2 ľahne na záhyb c .
- **Axióma 6)** Sú dané dva body P_1 , P_2 a dva záhyby c_1 , c_2 . Potom, kedykoľvek to vzájomná poloha P_1 , P_2 , c_1 a c_2 dovoľuje, môžeme ohnúť papier tak, že bod P_1 ľahne na záhyb c_1 a súčasne bod P_2 ľahne na záhyb c_2 .

² Robert J. Lang – americký fyzik, ktorý je jedným z popredných origami umelcov a teoretikov sveta

- **Axióma 7)** Je daný bod P a dva záhyby c_1, c_2 . Potom môžeme ohnúť papier tak, že bod P ľahne na záhyb c_1 a novovytvorený záhyb bude kolmý na záhyb c_2 .

Majme úsečku (dva krajné body), ktorá reprezentuje číslo 1 (jednotková úsečka). Úsečky, ktoré možno zostrojiť z jednotkovej úsečky rôznym kombinovaním a opakovaním Huzitových – Hatoriho operácií, reprezentujú čísla nazývané origami čísla [13]. Origami čísla sú zaujímavé z akademického i praktického hľadiska.

Ukázalo sa, že množina origami čísel obsahuje ako podmnožinu všetky čísla, ktoré možno zostrojiť v rámci Euklidovej geometrie, teda pomocou kružidla a neociachovaného pravítka. Ohýbanie papiera preto možno použiť na demonštrovanie všetkých rovinných euklidovských konštrukcií. No operácia, pri ktorej jediným ohnutím papiera dva rôzne body súčasne ľahnú na dva rôzne záhyby (axióma 6), umožňuje zostrojiť úsečky, ktoré sú riešeniami kubických rovníc. To už je nad sily klasickej Euklidovej geometrie. Takýmto spôsobom možno ohýbaním papiera elegantne vyriešiť dva z troch veľkých problémov antiky – trisekciu uhla a zdvojenie kocky, čo nie je možné urobiť pomocou kružidla a neociachovaného pravítka [13].

Z praktického hľadiska znalosť origami operácií a origami čísel umožnili zmeniť tvorbu nových origami skladačiek z metódy založenej na pokusoch a omyloch na systematický postup využívajúci výpočtovú techniku.

Pri skladaní origami modelu bežne začíname s čistým štvorcom papiera. Potrebujeme určiť jeden alebo viac referenčných bodov, spravidla (no nie nutne) na hranách hárku. Referenčné body zvyčajne rozdelia hranu na úsečky v potrebnom pomere v porovnaní s dĺžkou hrany. Tieto body následne použijeme na ďalšie ohýbanie papiera.

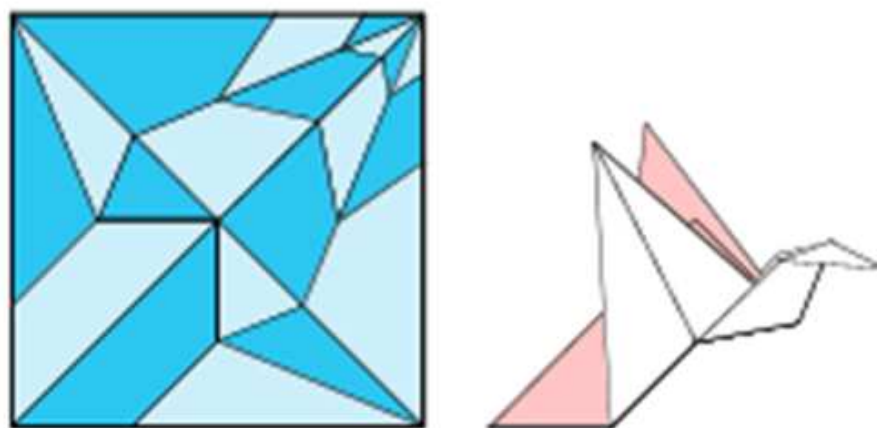
Efektívnym prostriedkom nájdenia referenčných bodov je napríklad program Roberta Langa, zvaný ReferenceFinder [10]. Program sa opiera o poznatky o zostrojiteľnosti origami čísiel / úsečiek pomocou Huzitových – Hatoriho operácií. Vstupom sú súradnice hľadaného referenčného bodu a výstupom optimálny postup ohýbania hárku papiera vedúci k lokalizácii hľadaného bodu.

Tvar výsledného origami modelu je zakódovaný v jeho záhybovom vzore. Úlohou origami návrhárov je preto nájsť vhodný záhybový vzor a postup ohýbania vedúci od záhybového vzoru k želanému trojrozmernému origami modelu.

Veľká väčšina publikovaných origami modelov patrí do triedy takzvaných plochých origami. Znamená to, že hotový model možno zložiť do roviny (vložiť medzi listy knihy a knihu zavrieť) bez pridania ďalších záhybov. Najväčší záujem je preto o štúdium záhybových vzorov zložiteľných naplocho („flat – foldable crease patterns“). Záhybový vzor je zložiteľný naplocho, ak papier môžeme poskladať podľa definovaných záhybov tak, že vznikne síce mnohovrstvový no planárny objekt.

Aby bol záhybový vzor podkladom pre ploché origami, musí mať určité vlastnosti. Tieto vlastnosti možno zhrnúť zhruba nasledovne [12], [1], [14]:

- 1) Záhybový vzor je dvoj – zafarbiteľný. Znamená to, že steny záhybového vzoru – mnohoúhelníky vytvorené na liste papiera záhybmi – možno vyfarbiť dvomi farbami tak, že žiadne dve rovnako vyfarbené steny nesusedia, to jest nemajú spoločnú hranu / záhyb.



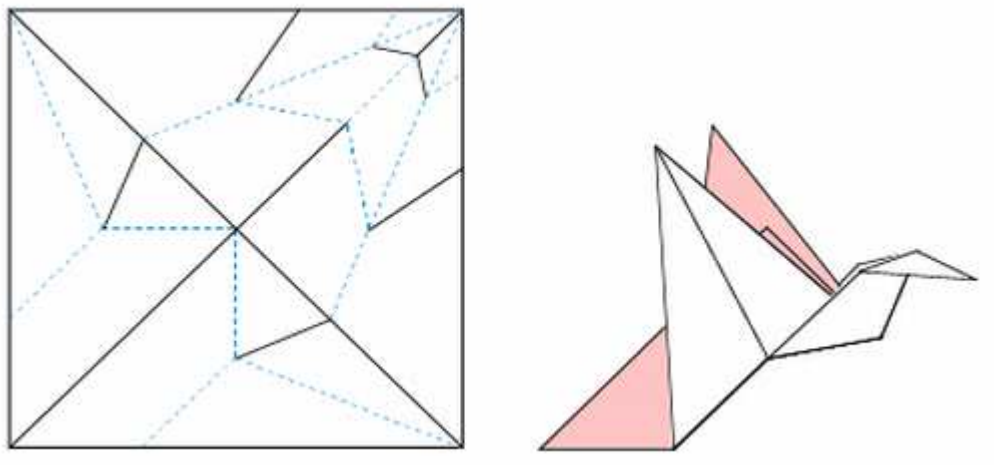
Obr. 2 Dvoj – zafarbiteľnosť záhybového vzoru

Prameň: Robert Lang, Usenix Conference, Boston MA, Jún 2008

- 2) Pre počet záhybov zbiehajúcich sa v jednom vrchole platí

$$|M - V| = 2 \tag{1}$$

M je počet záhybov typu hora (konvexné záhyby) a V je počet záhybov typu údolie (konkávne záhyby).



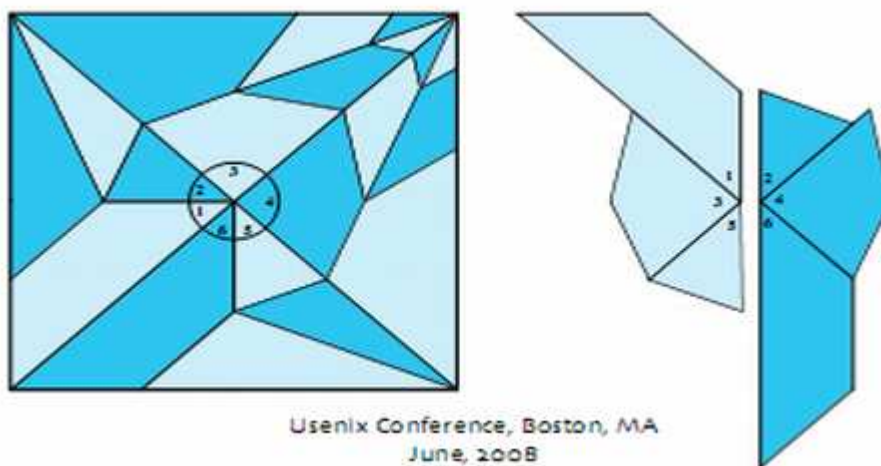
Obr. 3 Počítanie záhybov hora a údolie

Prameň: Robert Lang, Usenix Conference, Boston MA, Jún 2008

- 3) Pre uhly medzi záhybmi zbiehajúcimi sa v jednom vrchole platí

$$\sum_{i \text{ parne}} \phi_i = \sum_{i \text{ neparne}} \phi_i = 180^\circ \quad (2)$$

Uhly okolo daného vrcholu sú očíslované buď v smere alebo proti smeru hodinových ručičiek.

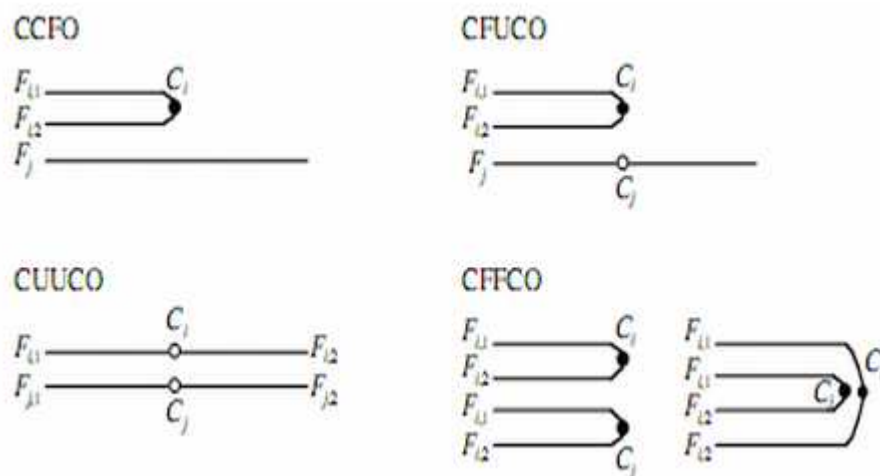


Obr. 4 Počítanie uhlov okolo vrcholu

Prameň: Robert Lang, Usenix Conference, Boston MA, Jún 2008

- 4) Existuje funkcia usporiadania, ktorá určuje poradie vrstiev v stohu na sebe ležiacich stien záhybového vzoru v zloženom plochom origami tak, že je

splnená podmienka samonepreniknuteľnosti papiera. Reálny papier je pri ohýbaní nepreniknuteľný, keďže nie je prípustné rezanie či strihanie papiera. Vo výslednom poskladanom origami sa teda jednotlivé vrstvy papiera môžu navzájom dotýkať, no nemôžu v záhyboch cez seba navzájom prenikať.



Obr. 5 Schémy prijateľných usporiadaní vrstiev

Prameň: Robert Lang, Usenix Conference, Boston MA, Jún 2008

Spomenuté pravidlá sú využité v algoritmoch slúžiacich na automatizáciu tvorby nových origami modelov pomocou počítačov. Veľa práce v danej oblasti vykonal Robert Lang. Výsledok jeho úsilia predstavuje program *TreeMaker*.

Vstupom programu *TreeMaker* je hranovo ohodnotený graf – strom. Každá hrana stromu reprezentuje jednu časť tela plánovanej figúrky a ohodnotenie predstavuje dĺžku príslušnej hrany. Program potom, zhruba povedané, každej hrane priradí kruh určitého polomeru a tieto kruhy s prihliadnutím na štruktúru grafu optimálne rozmiestni na daný hárok papiera. Kruhy následne vyplní záhybovými vzormi zvanými „molekula“. „Molekula“ je záhybový vzor v mnohouholníku, ktorý umožňuje daný mnohouholník zložiť tak, že jeho pôvodné hrany vytvoria graf typu strom. Lang našiel algoritmus – „univerzálna molekula“ – ktorý umožňuje vytvoriť potrebný záhybový vzor pre ľubovoľný mnohouholník. Nakoniec, ako výstup program *TreeMaker* nakreslí záhybový vzor pre požadovanú origami figúrku [14] [15].

Algoritmy použité v programe *TreeMaker* našli využitie aj mimo oblasti umeleckého origami – v inžinierskej praxi.

2 Využitie origami v praxi

Origami sa môže zdať iba ako obyčajné skladanie papiera, umenie pre umenie, ktoré nemá žiadne využitie v praxi. Opak je však pravdou. Ak sa totiž učíme ako lepšie poskladať papier, učíme sa zároveň ako lepšie poskladať mnoho iných vecí. Poznatky z geometrie ohýbania a skladanie rôznych materiálov podľa pravidiel origami nachádzajú v poslednej dobe stále širšie uplatnenie pri riešení problémov vznikajúcich v strojárstve, priemyselnom dizajne a technológii všeobecne. Algoritmy skladania sa aplikujú na objekty, ktoré musia byť účelne poskladané do malého priestoru či už natrvalo alebo iba počas transportu na potrebné miesto, kde sú automaticky a bezpečne znovu otvorené. Konečná lokalita môže byť veľmi rôznorodá, od obežnej dráhy okolo Zeme, cez miesto zrážky automobilov až po artériu v ľudskom tele.

2.1 Origami v strojárstve

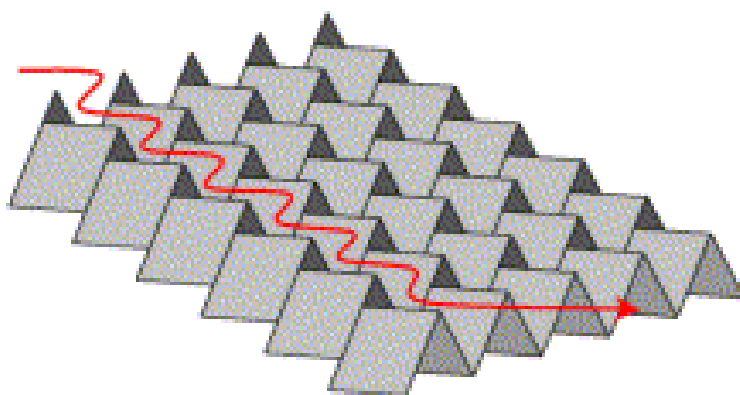
Origami, alebo ohýbané štruktúry všeobecne, sa v poslednom čase začínajú využívať pri konštrukcii mostov, lodí, lietadiel a satelitov, a to v podobe jadier sendvičových štruktúr. Existujúce klasické typy jadier pre sendvičové štruktúry sú penové/pevné jadro (používané v lodiach a lietadlách), jadro v tvare včelieho plástu (lietadlá, satelity), trámové/priehradové jadro (budovy, mosty) a sieťové jadro.

Napriek tomu, že sendvičové komponenty s penovým jadrom boli úspešne využité pri výrobe vesmírnych lodí, prevládajúcim typom jadra pre letecký priemysel je tvar včelieho plástu. Plástové jadrá majú vynikajúci pomer pevnosti k váhe a ohybového modulu k váhe. Navyše sú dizajnovy prispôsobivé, majú prvotriedne izolačné vlastnosti a ich výroba je finančne výhodná. Jadrá tvaru včelieho plástu však trpia niektorými nedostatkami, ktoré limitujú ich využitie v lietadlách prevažne na sekundárne štruktúry. Tieto nevýhody sú, medzi inými, zraniteľnosť voči nárazom, ktoré môžu spôsobiť odtrhnutie vrchnej vrstvy od jadra a problém hromadenia vlhkosti v uzavretých bunkách sendvičových jadier.

Vedci sa preto snažili nájsť tvar jadra, ktorý by tieto nedostatky odstránil. Riešením je skladané jadro. Skladané jadro je trojrozmerná štruktúra podobná origami, ktorá sa vyrába ohnutím plochého základného materiálu do trojrozmerného objektu. Tento typ štruktúry sa vyhýba niektorým nevýhodám plástových jadier, pričom

zachováva ich vynikajúce mechanické vlastnosti. Skladané jadro rieši problém hromadenia vlhkosti tým, že predstavuje otvorený bunkový dizajn, ktorý umožňuje vetranie skladaného jadra. Zraniteľnosť voči nárazom je sčasti vyriešená prispôsobivosťou geometrie elementárnych buniek skladaného jadra a použitím základných materiálov s vysokou absorpciou energie. Skladané jadro sa dá navyše vyrobiť finančne výhodným spôsobom použitím plynulého procesu.

V procese výroby sa dá použiť množstvo základných materiálov. Typickými základnými materiálmi sú tenké kovové fólie, plastové fólie alebo živicom napustené materiály zložené zo syntetických alebo prírodných vlákien, ktoré sa podobajú na papier [16].



Obr. 6 Skladané jadro

Prameň: FISHER, Sebastian et. al.: Mechanical tests for foldcore base material properties

2.2 Origami v automobilovom priemysle

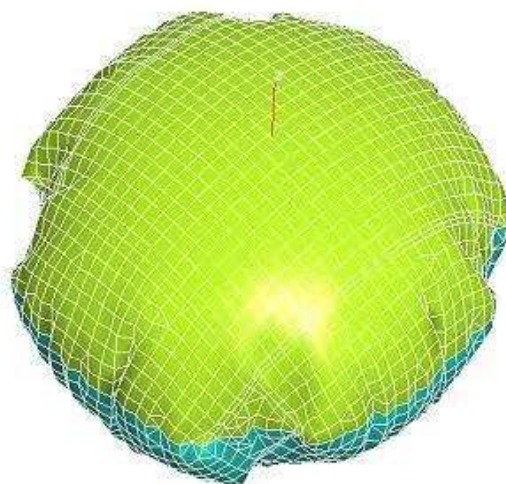
Ďalšou z oblastí využitia origami je vývoj airbagov do automobilov a testovanie ich bezpečného poskladania. Technici spoločnosti Carhs potrebovali na počítači presne zdokumentovať, ako sa pri aktivácii rozvinú štvorcové, sférické či kruhové airbagy. Než však simulácia mohla vôbec začať, bolo potrebné naprogramovať airbag poskladaný do kompaktnej formy za prístrojovou doskou. Požiadali preto o pomoc „origami experta“ Roberta Langa.

Zatiaľ čo poskladanie reálneho airbagu je pomerne jednoduché – stačí z neho odstrániť všetok vzduch – simulovanie procesu zloženia predstavuje dosť veľkú výzvu. Airbag je v prvom rade potrebné brať ako pevný objekt (akoby bol vyrobený z kartónu), potom nájsť záhyby, podľa ktorých sa skladá, a nakoniec ho poskladať do malého balíčka.

Ukázalo sa, že problém nájdenia záhybov na zloženie trojrozmerného mnohostenu na plochý tvar nie je tak vzdialený od úlohy nájdenia záhybov, ktoré zmenia plochý hárok papiera na ďalší plochý tvar. To druhé je jednou zo základných úloh, ktorú musia riešiť všetci origami návrhári (zložiteľnosť záhybového vzoru do plochého tvaru).

V jednej z metód počítačového origami, ktorá sa nazýva „*metóda stromu*“, sa vynára problém, keď potrebujete stlačiť skupinu mnohouholníkov tak, že ich rohy останú zároveň jeden s druhým. V origami sú všetky mnohouholníky časťou jediného štvorca papiera, ale tak isto by mohli byť aj stenami mnohostenu predstavujúceho nafúknutý airbag. Ukázalo sa, že algoritmus, ktorý sa nazýva „*univerzálna molekula*“, sa dá priamo aplikovať na problém airbagov, pretože poskytuje riešenie, ako nasimulovať kolaps veľkej skupiny dvojrozmerných útvarov.

Nemecká firma EASi Engenering zakomponovala algoritmus „*univerzálna molekula*“ do svojho simulačného programu a použila ho na niekoľko simulácii [17]. Počítače v Nemecku tak skladajú virtuálne airbagy vytvorené pomocou formúl z origami softvéru Roberta Langa [4]. Záujem o aplikáciu pravidiel origami pri simulácii airbagov stále pretrváva a výskum tejto témy pokračuje [17].



Obr. 7 Počítačová simulácia nafúknutého airbagu

Prameň: <<http://web.iitd.ac.in/~achawla/femesh.htm>>, 24.11.2009

2.3 Origami vo vesmírnom výskume

Origami môže takisto pomôcť rozšíriť náš pohľad na vesmír. *Eyeglass*, projekt skupiny vedcov z *Lawrence Livermore National Laboratory*, je vesmírny teleskop

s predpokladanou 100 metrovou šošovkou, ktorý bude mať 40 krát vyššie rozlíšenie ako doteraz najväčší Hubblov teleskop. Tento nový teleskop bude môcť skúmať planéty podobné Zemi okolo neďalekých hviezd.

Eyeglass bude používať difrakčné šošovky – veľkú sklenenú alebo plastovú fóliu s presnými ryhami, ktoré sú strojovo vyryté na jej povrchu [18]. Každá ryha funguje ako osobitný kus šošovky, ktorý sústreďuje svetlo na okulár [19]. Tenká plastová šošovka by pravdaže nebola veľmi pevná alebo silná na zemskom povrchu, ale na obežnej dráhe okolo Zeme to nie je problém.

Ale ako ju dostať do vesmíru? Tie stovky metrov štvorcových plastovej fólie bude treba poskladať do kompaktnej formy a vložiť do trubice, ktorá má v priemere 4 metre a je dlhá 10 metrov [18]. Šošovku však nemožno poskladať ľubovoľne, pretože by mohlo dôjsť k jej poškodeniu. Bolo teda potrebné nájsť vzor, podľa ktorého sa dá poskladať bez poškodenia. To pripomína origami.

Konštrukcia podobná origami bolo vo vesmíre už predtým. V 80tych rokoch letel na japonskom satelite skladací solárny panel inšpirovaný origami, ktorý navrhol Korjo Miura. Aj keď sa Miurova konštrukcia nedala priamo aplikovať na *Eyeglass*, vedci sa domnievali, že môžu existovať iné origami štruktúry, ktoré by mohli vyhovovať.

Preto požiadali o pomoc Langa. Potrebovali štruktúru, ktorá je stredovo súmerná, dá sa pomocou konečného počtu záhybov poskladať do kompaktnej cylindrickej formy a umiestniť do malého valca. Po tom, čo premysleli niekoľko rôznych konfigurácií, sa tím dohodol na variante, ktorá sa nazýva *dáždniková* štruktúra podľa svojej podobnosti so skladacím dáždnikom [20].

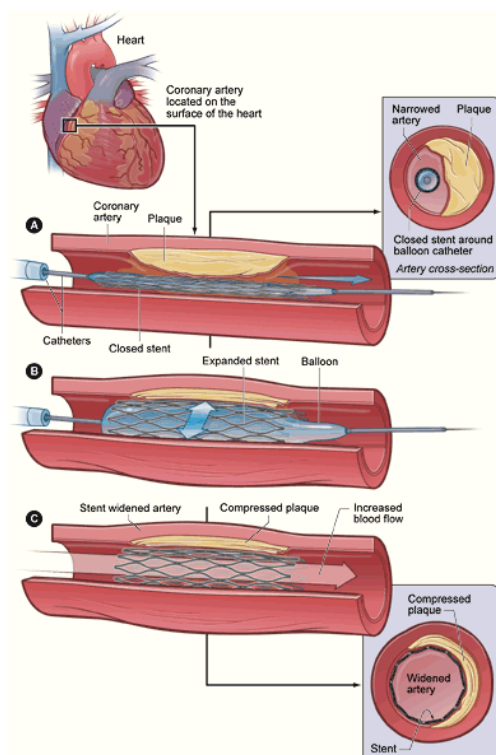


Obr. 8 Prototyp EyeGlass s Robertom Langom v popredí

Prameň: <http://www.langorigami.com/science/eyeglass/eyeglass.php4>, 24.11.2009

2.4 Origami v medicíne

Origami nachádza svoje využitie aj v medicíne. Konkrétne v podobe *stentu*. *Stent* je elastická trubicová štruktúra, ktorá sa dá poskladať na balíček malých rozmerov. To umožňuje dostať *stent* do problematických častí tela a tam ho potom spätne rozvinúť [21]. *Stent* môže, napríklad spriechnodiť upchatú artériu, keď sa roztvorí po príchode na postihnuté miesto. Počas cesty krvným riečišťom musí byť ale omnoho menší aby neuviazol na nevhodnom mieste. Tento *stent* sa skladá do kompaktného tvaru použitím origami vzoru, ktorý je založený na modeli nazvanom „vodná bomba“ [22]. Vďaka používaniu *stentu* sa vylepšilo liečenie rôznych chorôb [21].



Obr. 9 Umiestnenie stentu v upchatej artérii

Prameň: http://www.nhlbi.nih.gov/health/dci/Diseases/Angioplasty/Angioplasty_howdone.html,

24.11.2009

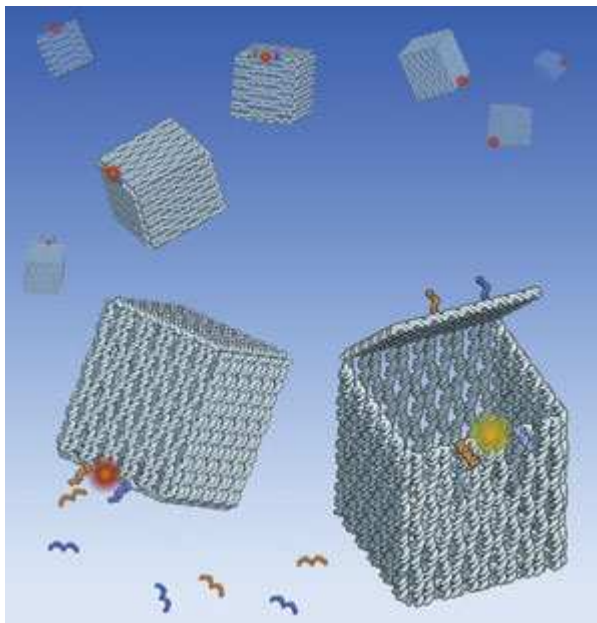
2.5 DNA – origami

Nedávno bola vyvinutá metóda, známa ako DNA – origami, ktorá umožňuje definovaným spôsobom ohýbať dlhý DNA reťazec do ľubovoľných dvoj- a trojrozmerných štruktúr. Dlhý DNA reťazec je ohýbaný tam a späť pokiaľ rastrovacím spôsobom nevyplní požadovaný tvar. Poohýbaný dlhý reťazec je držaný v ohnutom tvare vhodne zvolenými krátkymi reťazcami.

Metóda DNA – origami bola použitá na vytvorenie dvojrozmerných štruktúr ľubovoľného tvaru (štvorce, trojuholníky, hviezdy, smajlíky, atď.) Na získanej dvojrozmernej štruktúre sa dajú cielene rozmiestniť kratšie reťazce, čím sa môžu vytvárať rôzne obrazce [23]. Takáto adresovateľná dvojrozmerná DNA štruktúra môže byť použitá ako lešenie (platforma), na ktorom sa dajú presne umiestniť kovové nanočastice, uhlíkové nanorúrky, kremíkové nanodrôty alebo iné nanomateriály, čo otvára cestu k nanoelektronike [24].

Metódou DNA – origami boli vytvorené i trojrozmerné štruktúry. Za zmienku stojí trojrozmerná nanokrabička. Krabička sa dá zavrieť alebo otvoriť pridaním

vhodných chemických látok. Takýto objekt môže slúžiť ako nanokontajner na dopravu liekov na potrebné miesto v organizme, ako senzor, ako súčasť molekulárneho počítača, a podobne [25].



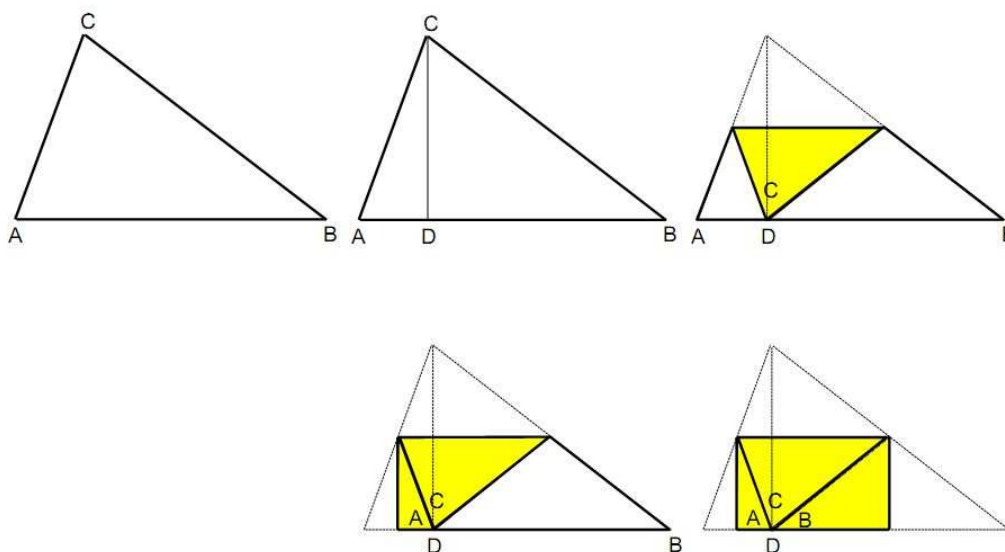
Obr. 10 DNA – origami v podobe nanokrabičky

Prameň: http://www.origamisources.com/origami_sightings_science.htm, 24.11.2009

3 Origami v pedagogike

Niektorí učitelia matematiky už dlhšie využívajú origami na zatriktívnenie a oživenie svojich prednášok či cvičení. Existuje dostatok literatúry, počnúc klasickou prácou *Geometric Exercises in Paper Folding* T. Sundara Rowa [9], cez, povedzme, Olsonovu publikáciu *Mathematics Through Paper Folding* [28], po nedávno publikovanú knihu T. Hulla *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics* [1], ktorá sa venuje skladaniu papiera ako nástroju na vyučovanie matematiky. Je na jednotlivých pedagógoch, či a akým spôsobom daný materiál použijú.

Pri „výkladovo“ orientovanom prístupe k vyučovaniu možno skladaním papiera názorne ilustrovať štandardné pojmy a výsledky školskej geometrie. Ak napríklad žiaci vidia učiteľa poskladať papierový trojuholník na obdĺžnik s rozmermi polovica základne krát polovica výšky (Obr. 11), veta o súčte vnútorných uhlov trojuholníka bude pre nich očividná a obsah trojuholníka ľahko vypočítateľný.



Obr. 11 Zloženie trojuholníka na obdĺžnik

Didaktický potenciál origami sa však naplno prejaví pri „objaviteľskom“ štýle vyučovania. V takom prípade sú aktívni študenti a učiteľ pôsobí viac-menej iba ako poradca. Tu môže poskladaný kus papiera predstavovať „experimentálne laboratórium“ [1] kde si študenti rozvíjajú tvorivosť či pestujú schopnosť klásť správne otázky a hľadať odpovede.

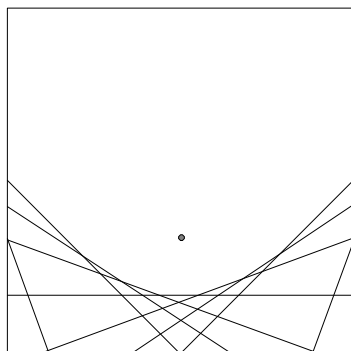
Ako sme zistili, dostupná literatúra obsahuje veľký počet cvičení a aktivít vhodných pre rôzne stupne škôl, od základných po vysoké. Je však takmer isté, že konkrétna požadovaná téma nie je v literatúre „hotová“ a „kompletne spracovaná“. Zvyčajne je potrebné čerpať z viacerých zdrojov a získaný materiál prispôbiť svojim potrebám a predstavám.

Uvádzame niektoré z veľkého počtu zozbieraných námetov. S prihliadnutím na odporúčanú literatúru, vybrali sme témy z knihy T. Hulla [1]. Ich obsah sme často doplnili a rozšírili materiálom z iných zdrojov. Kvôli konzistentnosti výkladu a kompatibilite jednotlivých častí bolo potom nutné nielen modifikovať matematickú analýzu podávanú príslušnými publikáciami, no v niektorých prípadoch ju aj doplniť o originálny rozbor. Týka sa to hlavne pasáží venovaných riešeniu kvadratickej či kubickej rovnice metódou origami, v malej miere tiež Fujimotovej metódy delenia hrany papiera na časti.

3.1 Konštrukcia paraboly skladaním papiera

Pozrieme sa dôkladnejšie na piatu Huzitovu – Hatoriho operáciu/ axiómu. Obsahuje tvrdenie, že za istých podmienok vieme jediným ohnutím papiera položiť jeden existujúci bod F na existujúci záhyb d a druhým existujúcim bodom G preložiť novo vytvorený záhyb t . Aby sme došli ku geometrickej interpretácii tejto operácie, začneme s jednoduchšou úlohou. Pozrieme sa najprv, k čomu vedie ohnutie papiera, pri ktorom daný bod ľahne na daný záhyb. Pri rozbere tejto situácie budeme v hlavných rysoch sledovať kapitolu „Activity 4: Folding a Parabola“ z knihy T.Hulla[1].

Vezmime hárok papiera a označme na ňom jeden bod. Potom ohnime papier tak, že označený bod ľahne na dolnú hranu papiera a vytvorme záhyb. Operáciu viackrát opakujeme, pričom označený bod ľahne vždy na iný bod dolnej hrany. Dostaneme množinu záhybov, niečo ako Obr. 12. Plocha „obalená“ záhybmi zhruba pripomína vnútro paraboly.

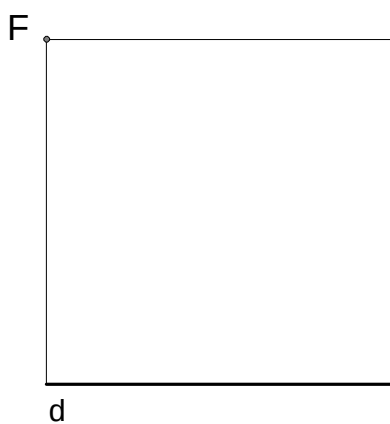


Obr. 12 Parabola 1

Kvôli overeniu núkajúcej sa hypotézy, že opisovaná operácia má niečo spoločné s parabolou, urobíme niekoľko jednoduchých konštrukcií.

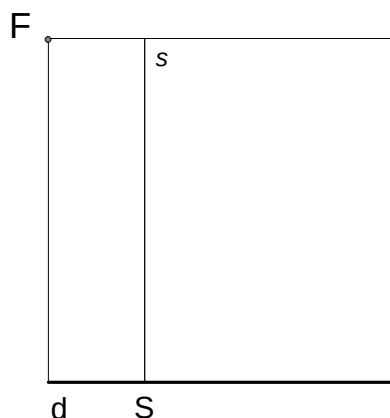
3.1.1 Konštrukcia

Vezmime hárok papiera. Ako bod F označme ľavý horný vrchol háрку, ako d označme priamku obsahujúcu dolnú vodorovnú hranu papiera (Obr. 13).



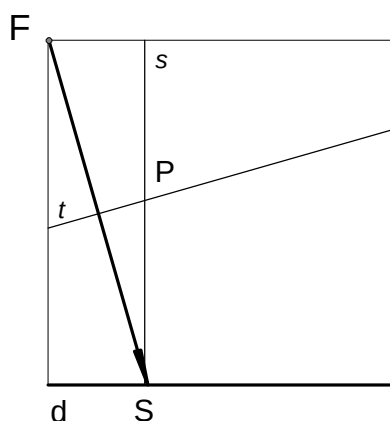
Obr. 13 Parabola 2

Zložme papier tak, aby vznikol záhyb s kolmý na priamku d . Priesečník záhybu s priamkou d označme ako bod S (Obr. 14).



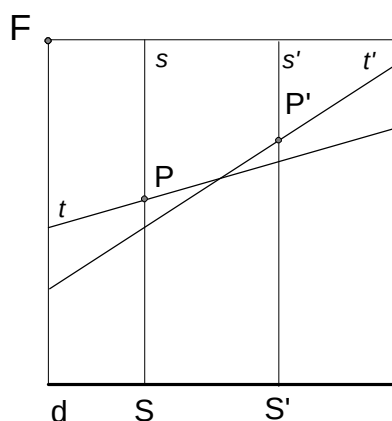
Obr. 14 Parabola 3

Ľavý horný vrchol papiera premiestnime tak, aby bod F ležal na bode S a papier zložme. Vznikne záhyb t . Keďže pri preložení kladieme jednu časť papiera na druhú a bod F položíme na bod S , je jasné, že všetky body na zhybovej čiare budú rovnako vzdialené od F a S . Záhyb t je teda osou úsečky FS . Priesečník záhybu t a záhybu s označme ako bod P (Obr. 15).



Obr. 15 Parabola 4

Keďže záhyb t je osou úsečky FS , bod P ležiaci na t má rovnakú vzdialenosť od bodu F (veľkosť úsečky PF) ako od bodu S (veľkosť úsečky PS). Keďže záhyb s je kolmý na priamku d , je vzdialenosť bodu P od bodu S zároveň jeho vzdialenosťou od priamky d . Opísanú operáciu môžeme mnohokrát zopakovať s inými záhybmi s' kolmými na priamku d (Obr. 16).



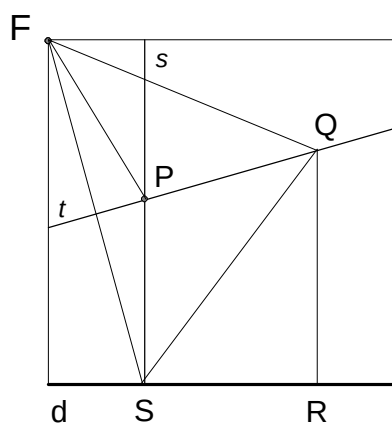
Obr. 16 Parabola 5

Dostaneme tak veľký počet rôznych bodov P' , ktoré však majú spoločnú vlastnosť: každý jeden z nich má rovnakú vzdialenosť od danej priamky d ako od daného bodu F .

Množina všetkých bodov roviny, ktoré majú rovnaké vzdialenosti od danej priamky d a od daného bodu F , pričom F neleží na d , tvorí podľa definície krivku zvanú parabola [26]. Bod F je ohniskom paraboly a priamka d jej riadiacou priamkou.

Záhyb t je osou úsečky FS a teda aj osou súmernosti rovnoramenného trojuholníka $\triangle FPS$, kde bod P leží na t (Obr. 15). Keďže priamka t prechádza bodom P paraboly a súčasne rozpoľuje uhol $\angle FPS$, je dotyčnicou danej paraboly v bode P . Vyplýva to z faktu, že priamka t prechádzajúca bodom P paraboly je dotyčnicou v bode P práve vtedy, ak t rozpoľuje vonkajší uhol sprievodičov dotykového bodu P [26]. V našom prípade je vonkajším uhlom sprievodičov uhol $\angle FPS$.

Bod P paraboly ležiaci na dotyčnici t je rovnako vzdialený od ohniska F a riadiacej priamky d . Pozrime sa na iný bod ležiaci na dotyčnici t , povedzme bod Q (Obr. 17).

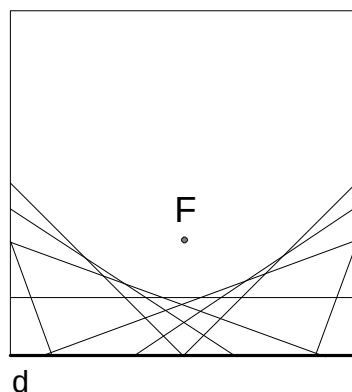


Obr. 17 Parabola 6

Keďže bod Q leží na osi úsečky FS , je rovnako vzdialený od bodu F ako od bodu S . No jeho vzdialenosť od priamky d (veľkosť úsečky QR) je menšia ako vzdialenosť od bodu S , keďže odvesna pravouhlého trojuholníka $\triangle QRS$ je vždy kratšia ako jeho prepona.

Okrem dotykového bodu P sú teda všetky ostatné body dotyčnice t bližšie k riadiacej priamke paraboly ako k jej ohnisku. Všetky body dotyčnice, okrem dotykového bodu, sú preto vonkajšími bodmi paraboly [26]. Hovoríme potom, že dotyčnice „obaľujú“ parabolu. Túto skutočnosť možno využiť na trochu inú konštrukciu paraboly pomocou skladania papiera, kde sa zaobídeme bez záhybov s kolmých na priamku d . Ide o konštrukciu, ktorú sme už spomínali v úvode tejto kapitoly.

Dolnú vodorovnú hranu papiera opäť označíme ako d . Vo vnútri papiera si označíme bod F . Papier zložíme tak, aby bod F ležal na hrane d . Príslušný záhyb predstavuje dotyčnicu k parabole s ohniskom F a riadiacou priamkou d . Operáciu veľakrát opakujeme, pričom bod F leží vždy na inom bode hrany d . Vytvoríme takto množinu dotyčníc, ktoré „obaľujú“ parabolu (Obr. 18).



Obr. 18 Parabola 7

Pri praktickej realizácii tejto konštrukcie je výhodnejšie prehýbať papier hranou k bodu F než opačne.

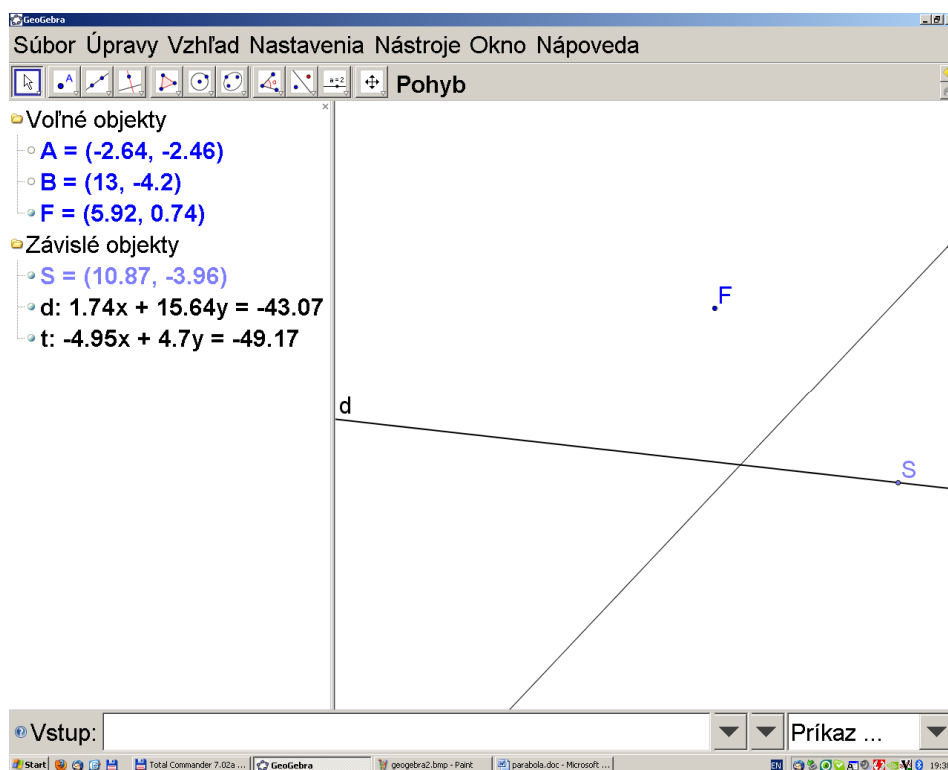
3.1.2 Simulácia skladania papiera

Užitočným doplnkom skutočného skladania papiera môže byť modelovanie tejto činnosti na počítači pomocou vhodného softvéru. Je pritom potrebné vychádzať z euklidovskej interpretácie jednotlivých operácií a postupov, ktoré sa pri skladaní papiera používajú, to znamená použiť analogické konštrukcie pomocou pravítka a kružidla. Zohnutiu papiera tak, aby záhyb prechádzal dvoma danými bodmi zodpovedá preloženie priamky týmito dvoma bodmi; zohnutie papiera tak, aby daný bod A ľahol na daný bod B predstavuje zostrojenie osi úsečky AB ; zohnutiu papiera tak, aby daný záhyb a ľahol na daný záhyb b zodpovedá zostrojenie osi uhla zvieraného priamkami a a b , a podobne.

Vhodným programom na modelovanie skladania papiera je softvér GeoGebra [Príloha A].

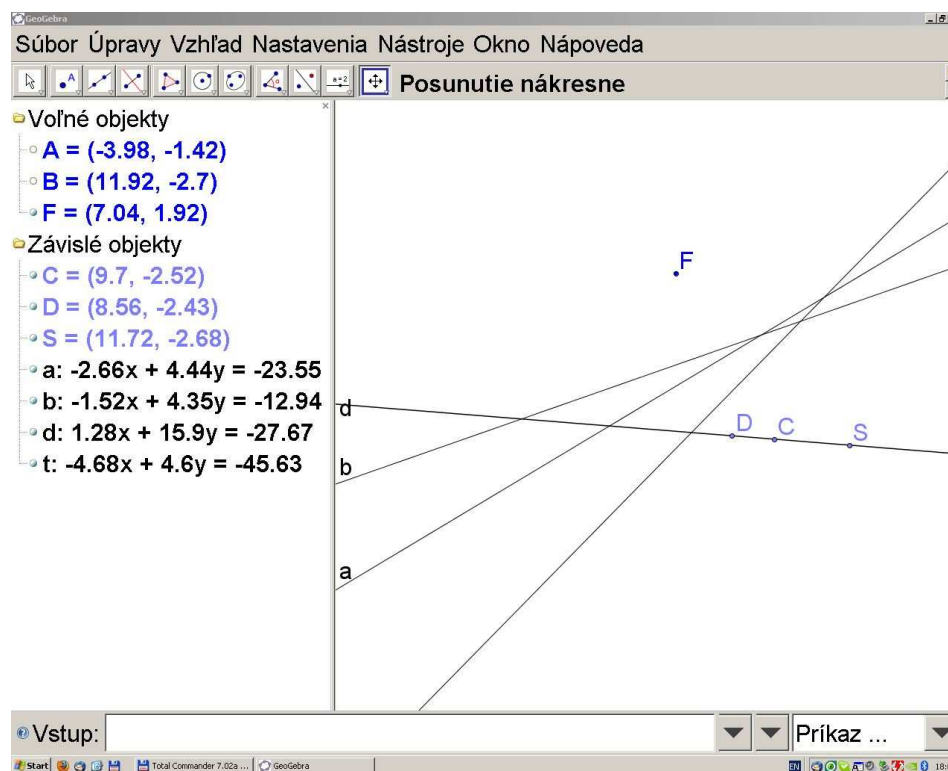
Pri simulácii konštrukcie paraboly v GeoGebre postupujeme nasledovne:

- (1) Zostrojíme priamku a nazveme ju d (táto priamka predstavuje hranu papiera)
- (2) Zvolíme bod mimo d a nazveme ho F
- (3) Zvolíme bod na d a nazveme ho S
- (4) Vyberieme príkaz **Os úsečky** a označíme body F a S , vzniknutú os nazveme t



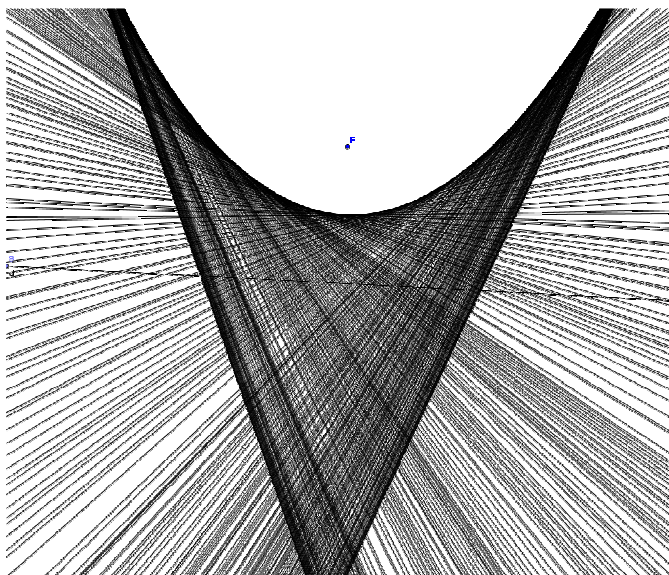
Obr. 19 Začiatok simulácie v programe GeoGebra

Os úsečky, ktorá vznikne, predstavuje náš záhyb t . Opakovať môžeme viackrát.



Obr. 20 Simulácia v programe GeoGebra s viacerými priamkami

Urobiť viac priamok naraz umožňuje príkaz **Stopa zapnutá**. Potom pohybujeme bodom S tam a späť po d . Vznikne útvar podobný ako na Obr. 21



Obr. 21 Hotová parabola vytvorená v GeoGebre

3.1.3 Analytické vyjadrenie

Aby sme opísali uvažované geometrické objekty prostriedkami algebry, použijeme Descartovu súradnicovú metódu. Hárok papiera považujeme za súčasť nekonečnej euklidovskej roviny. Ak je daný bod F a priamka d , môžeme zaviesť kartézsku súradnicovú sústavu tak, aby priamka d bola rovnobežná s osou x a bod F ležal na osi y . Nech sú začiatok súradnicovej sústavy a dĺžkové jednotky zvolené tak, že bod F má súradnice $[0, 1]$ a priamku d popisuje rovnica $y+1=0$. Každému bodu roviny možno priradiť práve jednu usporiadanú dvojicu čísel $[x, y]$ - jeho súradnice.

Papier zohneme tak, že bod F ľahne na bod S na priamke d . Nech bod S má súradnice $[u, -1]$, kde u je reálne číslo. Priamka prechádzajúca bodmi $F=[0,1]$ a $S=[u, -1]$ je popisovaná rovnicou

$$2x + uy - u = 0. \quad (3)$$

Záhyb t , ktorý vznikne preložením bodu F na bod S , bude kolmý na priamku FS . Všeobecná rovnica priamky kolmej na priamku (3) má tvar [27]

$$ux - 2y + C = 0. \quad (4)$$

C je ľubovoľné reálne číslo. Záhyb t je však aj osou úsečky FS , teda prechádza jej stredom, bodom $[u/2, 0]$. Rovnica záhybu t potom bude

$$ux - 2y - \frac{1}{2}u^2 = 0. \quad (5)$$

Ide o parametrickú rovnicu. Parameter u je určovaný polohou bodu S priamky d , na ktorý si ľahne bod F pri ohnutí papiera.

Ako bolo ukázané vyššie, takto vytvorený záhyb predstavuje dotyčnicu paraboly s ohniskom F a riadiacou priamkou d . Ukázali sme tiež, že dotyčnice (záhyby) prechádzajú len tými bodmi roviny, ktorých vzdialenosť od ohniska je rovnaká alebo väčšia ako vzdialenosť od riadiacej priamky. V rovine však existujú body, ktoré sú bližšie k ohnisku ako k riadiacej priamke (v našom prípade napríklad body kladnej polosi osi y). Takýmito bodmi neprechádza žiadna dotyčnica, teda ležia vo vnútri oblasti „obaľovanej“ dotyčnicami. Súradnice týchto bodov nespĺňajú žiadnu z rovníc dotyčnice (5). Úlohou je nájsť tieto body.

Ak bod $[x, y]$ leží na dotyčnici, jeho súradnice spĺňajú rovnicu dotyčnice (5), teda

$$ux - 2y - \frac{1}{2}u^2 = 0$$

pre nejaké číslo u . Rovnicu (5) trochu upravíme.

$$-2ux + 4y + u^2 = 0$$

$$(u - x)^2 - x^2 + 4y = 0$$

$$(u - x)^2 = x^2 - 4y \quad (6)$$

Ak $x^2 - 4y < 0$, rovnica (6) je v množine reálnych čísel neriešiteľná pretože druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná. To jest, nemôžeme nájsť žiadnu trojicu reálnych čísel x, y, u ktoré by spĺňali rovnicu (6) a podmienku $x^2 < 4y$. Ak teda súradnice bodu spĺňajú podmienku

$$y > \frac{x^2}{4}, \quad (7)$$

neexistuje dotyčnica (5), ktorá by týmto bodom prechádzala. Bod sa nachádza v oblasti „obaľovanej“ dotyčnicami.

Hranica dotyčniciam „nedostupnej“ oblasti je daná rovnicou

$$y = \frac{1}{4}x^2, \quad (8)$$

čo predstavuje rovnicu našej paraboly.

3.1.4 Riešenie kvadratickej rovnice

Teraz sa môžeme vrátiť k piatej Huzitovej – Hatoriho axióme. Vidíme, že táto operácia preloží daným bodom G záhyb t tak, že tento záhyb je súčasne dotyčnicou paraboly definovanej ohniskom F a riadiacou priamkou d . Nájst' záhyb t algebraickými prostriedkami vyžaduje vyriešiť kvadratickú rovnicu (napríklad nájst' hodnotu parametra u , pre ktorú súradnice bodu G spĺňajú rovnicu (5)). To ale znamená, že operácia opísaná axiómou 5 vlastne nachádza riešenie určitej kvadratickej rovnice konštruktívnou cestou.

Než uvedieme príklad „origami“ metódy riešenia kvadratickej rovnice, sú potrebné určité prípravné kroky, aby sme ľahšie pochopili prečo a ako daná metóda funguje.

Nech je daná parabola $y = ax^2 + b$, priamka $y = kx + l$ a bod $G = [m, n]$. Požadujeme, aby daná priamka prechádzala bodom G . Musí preto platiť $n = km + l$. Rovnica priamky prechádzajúcej bodom G potom bude:

$$y = kx + (n - km). \quad (9)$$

Ďalej požadujeme, aby daná priamka bola súčasne aj dotyčnicou paraboly, to jest mala s parabolou spoločný bod $[x_0, y_0]$. Platí teda $y_0 = kx_0 + (n - km)$ a súčasne $y_0 = ax_0^2 + b$. Odtiaľ

$$ax_0^2 + b = kx_0 + (n - km) \quad (10)$$

a po úprave

$$\left(x_0 - \frac{k}{2a}\right)^2 = \left(\frac{k}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}(n - km - b). \quad (11)$$

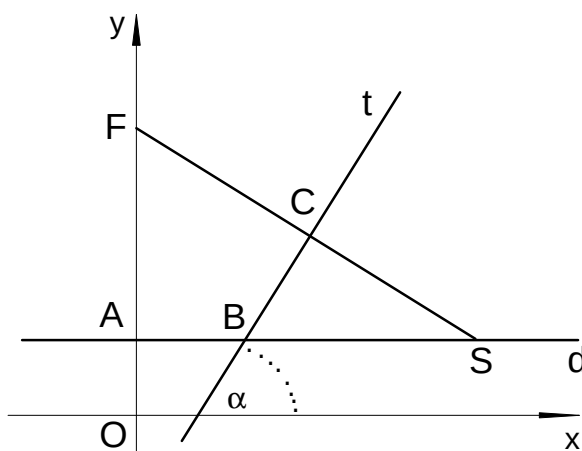
Bod dotyku je jediným spoločným bodom paraboly a jej dotyčnice, existuje teda len jediná reálna súradnica x_0 . Aby to tak bolo, pravá strana rovnice (11) musí byť rovná nule. Smernica k dotyčnice t musí teda spĺňať kvadratickú rovnicu

$$k^2 - 4amk + 4a(n - b) = 0. \quad (12)$$

Skôr než so smernicou (tangensom smerového uhla dotyčnice) potrebujeme pracovať s dĺžkami úsečiek.

Pre parabolú zadanú rovnicou $y=ax^2+b$ leží ohnisko na osi y a riadiaca priamka je rovnobežná s osou x . Z predchádzajúceho vieme, že dotyčnica t je osou úsečky FS , kde F je ohnisko paraboly a bod S je bodom riadiacej priamky, na ktorú ľahne ohnisko pri tvorbe dotyčnice (záhybu) t ohýbaním papiera.

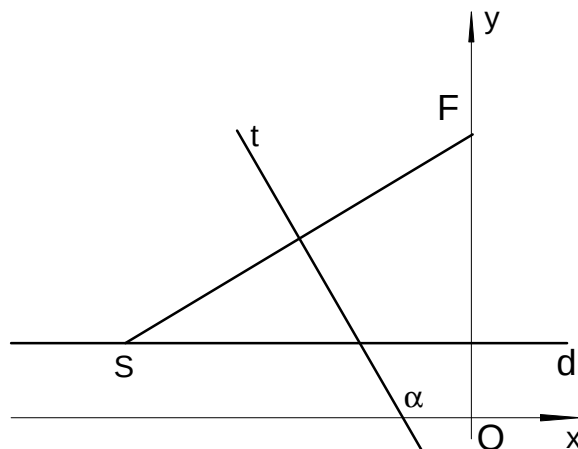
Nech je smerový uhol α dotyčnice t menší ako pravý uhol (Obr. 22).



Obr. 22 Kvadratická rovnica 1

Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $\triangle SCB$ a $\triangle SAF$ potom vyplýva rovnosť uhlu α a uhlu $\angle OFS$. Keďže $k = \tan \alpha$, potom

$$k = \frac{\text{vzdialenosť } S \text{ od } y}{\text{vzdialenosť } F \text{ od } d}. \quad (13)$$



Obr. 23 Kvadratická rovnica 2

Ak je smerový uhol α väčší ako pravý uhol (Obr. 23), máme $\pi - \alpha = \angle OFS$. Keďže $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, dostaneme

$$k = -\frac{\text{vzdialenosť } S \text{ od } y}{\text{vzdialenosť } F \text{ od } d}. \quad (14)$$

Ak bude vzdialenosť ohniska F paraboly od jej riadiacej priamky d jednotková, hodnota smernice k dotyčnice t bude čo do veľkosti i znamienka rovná x -ovej súradnici bodu S riadiacej priamky, na ktorý si ľahne ohnisko pri tvorbe dotyčnice t .

Nech je riadiaca priamka priamo osou x a ohnisko má súradnice $[0,1]$. Koeficienty v rovnici paraboly potom budú $a=b=1/2$. Kvadratická rovnica (12) pre smernicu dotyčnice (a teda aj pre x -ovú súradnicu bodu S) nadobudne tvar $k^2 - 2mk + 2n - 1 = 0$. Ak položíme $m=p/2$ a $n=(q+1)/2$, dostaneme

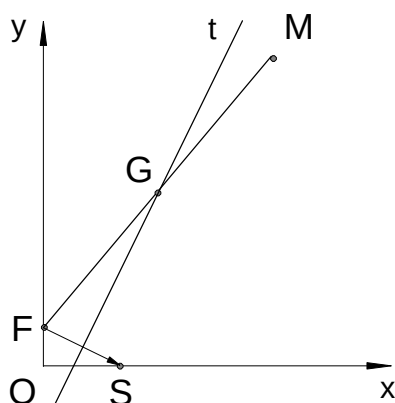
$$k^2 - pk + q = 0. \quad (15)$$

Takto vybraný bod $G = [p/2, (q+1)/2]$, ktorým musí prechádzať dotyčnica t , predstavuje stred úsečky FM , kde $F = [0,1]$ a $M = [p,q]$.

Tieto úvahy nás priamo priviedli k metóde riešenia rovnice (15), ktorú publikoval napríklad A.T. Olson [28].

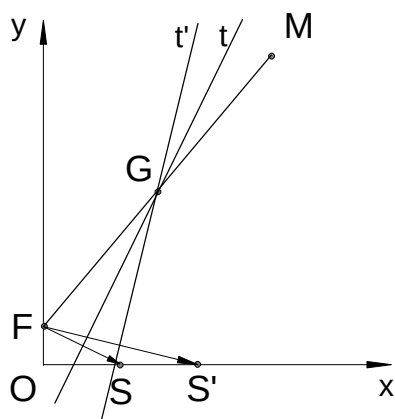
Majme rovnicu $x^2 - px + q = 0$, p a q sú reálne čísla. Ak však chceme byť puritáni a riešiť rovnicu čisto prostriedkami origami, koeficienty p a q musia byť

„origami čísla“, aby sme ich mohli zostrojiť a vyniesť na osi čisto ohýbaním papiera. Na papieri zavedieme kartézsku súradnicovú sústavu so začiatkom O a zostrojíme body $M=[p, q]$ a $F=[0, 1]$. Zložíme papier tak, aby záhyb prechádzal bodmi M a F . Potom zložíme papier tak, že bod M ľahne na bod F , čím nájdeme stred úsečky MF . Tento stred označíme ako bod G . Teraz papier zložíme tak, že bod F ľahne na x -ovú os a súčasne vytvorený záhyb t prechádza bodom G (Obr. 24).



Obr. 24 Kvadratická rovnica 3

Ak rovnica $x^2 - px + q = 0$ má dva rôzne reálne korene, podarí sa nám nájsť dva rôzne body osi x , na ktoré možno ohnutím papiera umiestniť bod F tak, že vytvorený záhyb t súčasne prechádza bodom G . Ak tieto dva body sú S a S' , potom ich x -ové súradnice predstavujú korene rovnice čo do veľkosti i znamienka (Obr. 25).



Obr. 25 Kvadratická rovnica 4

Ak má rovnica $x^2 - px + q = 0$ dvojnásobný reálny koreň, nájdeme jeden bod S . Ak daná rovnica nemá reálne korene, nepodariť sa nám zostrojiť žiaden bod S . V takom prípade je totiž veľkosť úsečky FG menšia ako vzdialenosť bodu G od osi x .

Prakticky sme si vyskúšali riešenie rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$. Za „jednotkovú úsečku“ sme vybrali úsečku dlhú 20 mm. Našli sme dva body S_1 a S_2 s x -ovými súradnicami 20,5 mm a 39,5 mm. Pri „jednotke dĺžky“ zodpovedajúcej 20 mm to predstavuje korene 1,025 a 1,975. Presné korene študovanej rovnice sú 1 a 2. Vyššiu presnosť by bolo možné dosiahnuť, ak by sa zvolila dlhšia „jednotková úsečka“.

3.2 Riešenie kubickej rovnice ohýbaním papiera

Ak predpokladáme, že všetky záhyby sú priame a že je dovolené urobiť naraz (to jest v jednom kroku) len jeden záhyb, potom operácia opisovaná axiómou 6 je najzložitejšia možná operácia (v zmysle najvyššieho stupňa rovnice, ktorú je operácia schopná vo všeobecnosti vyriešiť) [1].

Majme hárok papiera, na ňom dva rôzne záhyby f , g a dva rôzne body F , G , neležiace na žiadnom zo záhybov. Urobíme operáciu, opisovanú 6. axiómou. Ohneme papier tak, že bod F ľahne na záhyb f a súčasne bod G ľahne na záhyb g . Predpokladáme, že body a záhyby sú dané tak, že táto operácia je možná. Ohnutím papiera vznikne záhyb t . Z predchádzajúceho vieme, že ohnutie papiera, pri ktorom bod F ľahne na záhyb f , vytvorí nový záhyb, ktorý je dotyčnicou paraboly s ohniskom F a riadiacou priamkou f . Vzhľadom na túto skutočnosť môžeme axiómu 6 geometricky interpretovať nasledovne:

Dané sú dve paraboly definované svojimi ohniskami a riadiacimi priamkami. Potom môžeme zostrojiť ich spoločnú dotyčnicu, ak táto dotyčnica existuje.

Venujme sa problému spoločnej dotyčnice dvoch parabol. Pri riešení kvadratickej rovnice sa nám osvedčila parabola s osou x ako riadiacou priamkou a ohniskom na osi y v jednotkovej vzdialenosti od riadiacej priamky. Tento výber nám umožnil previesť smernicu dotyčnice k parabole na veľkosť a orientáciu zostrojenej úsečky, čo je ľahšie merateľná veličina. Modifikujeme preto postup bežne prezentovaný v literatúre [13], [1], to jest vyberáme iné paraboly.

Prvú parabolu vyberieme v tvare popisovanom rovnicou $x^2 = 2(y - 1/2)$. Druhú parabolu vyberieme s horizontálnou osou, v tvare opisovanom rovnicou $[y - (q+1)/2]^2 = 2px$. Spoločnú dotyčnicu týchto parabol hľadáme v tvare $y = kx + l$. Nech sa táto priamka dotýka prvej paraboly v bode $[x_1, y_1]$. Potom platí $y_1 = kx_1 + l$ a súčasne $x_1^2 = 2(y_1 - 1/2)$. Odtiaľ máme $x_1^2 = 2(kx_1 + l - 1/2)$. Po úprave dostaneme

$$(x_1 - k)^2 = k^2 + 2l - 1 \quad (16)$$

Pre dané k a l je dotykový bod jediný. Aby to tak bolo, k a l musia vyhovovať rovnici

$$k^2 + 2l - 1 = 0 \quad (17)$$

Druhej paraboly nech sa dotyčnica dotýka v bode $[x_2, y_2]$. Platí teda $y_2 = kx_2 + l$ a súčasne $[y_2 - (q+1)/2]^2 = 2px_2$. Odtiaľ $[y_2 - (q+1)/2]^2 = 2p(y_2 - l)/k$. Po úpravách dostaneme:

$$\left(y_2 - \frac{q+1}{2} - \frac{p}{k}\right)^2 = \left(\frac{p}{k}\right)^2 + \frac{p}{k}(q+1) - 2l\frac{p}{k} \quad (18)$$

Pre dané k, l je dotykový bod jediný. Aby to tak bolo, k a l musia vyhovovať rovnici

$$p + k(q+1) - 2lk = 0 \quad (19)$$

Z rovnice (17) vyjadríme $2l$ a dosadíme do (19). Dostaneme

$$p + qk + k^3 = 0 \quad (20)$$

Vidíme, že smernica k spoločnej dotyčnice t je riešením kubickej rovnice.

Ohnisko F paraboly $x^2 = 2(y - 1/2)$ má súradnice $[0, 1]$ a radiacou priamkou f je os x . Ohnisko G paraboly $[y - (q+1)/2]^2 = 2px$ má súradnice $[p/2, (q+1)/2]$ a radiacou priamkou g je priamka $x = -p/2$. To vedie k nasledujúcej metóde riešenia rovnice $p + qx + x^3 = 0$.

Majme hárok papiera. Zaveďme kartézsky súradnicový systém a zostrojme body $F = [0, 1]$, $M = [p, q]$ a $N = [-p, q]$. Ohneme papier tak, že vytvoríme záhyb prechádzajúci bodmi F a M . Potom ohneme papier tak, že bod F ľahne na bod M . Nájdeme tak stred úsečky FM a označíme ho ako bod G . Bod G má súradnice

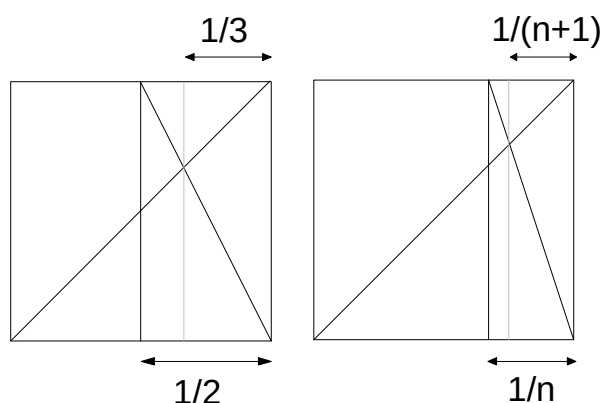
$[p/2, (q+1)/2]$. Analogicky zostrojíme úsečku FN a nájdeme jej stred. Ohneme papier tak, že vytvoríme záhyb g kolmý na os x a prechádzajúci stredom úsečky FN . Záhyb g reprezentuje priamku danú rovnicou $x + p/2 = 0$. Takto sme zostrojili ohniská (F, G) a riadiace priamky (os x , záhyb g) dvoch parabol. Teraz urobíme operáciu opísovanú axiómou 6. Ohneme papier tak, že bod F ľahne na os x a súčasne bod G ľahne na záhyb g . Vytvoríme tým nový záhyb t . x -ová súradnica bodu S , na ktorý si ľahne bod F pri vytváraní záhybu t , predstavuje hľadaný koreň rovnice $p + qx + x^3 = 0$. Podarí sa nám zostrojiť jeden, dva alebo tri záhyby t v závislosti od toho, koľko reálnych koreňov konkrétna kubická rovnica má.

Metódu sme si overili riešením rovnice $3 + 2x + x^3 = 0$. Pri zvolenej „jednotkovej úsečke“ dĺžky 20 mm sme dostali ako riešenie úsečku dĺžky 21 mm, nachádzajúcu sa na zápornej poloosi x . Ako koreň rovnice nám teda vyšlo číslo -1,05. Študovaná rovnica má jediný presný reálny koreň, a to -1.

3.3 Delenie úsečky na časti

Existuje niekoľko operácií, ktoré sú potrebné pre praktické poskladanie origami modelov i pre riešenie rôznych teoretických problémov. Jednou z takýchto úloh je rozdeliť hárok papiera (poprípade jeho hranu či jej časť) na n rovnakých častí. Je ľahké zložiť papier na polovice, štvrtiny, osminy, všeobecne na 2^n rovnakých častí. Rozdeliť papier na nepárny počet zhodných častí (tretiny, pätiny,...) je trochu tvrdší oriešok.

Presnému rozdeleniu štvorca papiera na nepárny počet rovnakých častí sa venuje kapitola *Activity 3: Dividing a length into equal Nths exactly* knihy [1]. Existuje viacero postupov ako cieľ dosiahnuť. V danej kapitole sa začína nasledujúcou metódou.



Obr. 26 Delenie štvorca na nepárny počet zhodných častí

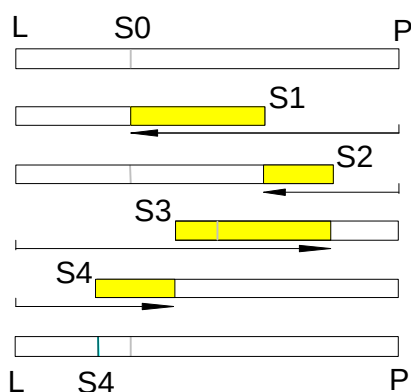
Vezmime štvorec papiera. Hranu štvorca považujeme za jednotku dĺžky. Papier zložíme tak, že vznikne zvislý záhyb vo vzdialenosti $1/m$ od pravej zvislej strany štvorca. Vytvorený záhyb delí štvorec na dva obdĺžniky. Vytvorme záhyb spájajúci ľavý dolný roh štvorca s jeho pravým horným rohom, to jest vytvoríme uhlopriečku štvorca. Ďalej vytvorme záhyb spájajúci ľavý horný roh pravého obdĺžnika s jeho pravým dolným rohom, to jest vytvoríme uhlopriečku pravého obdĺžnika. Uhlopriečky štvorca a obdĺžnika sa pretínajú vo vzdialenosti $1/(m+1)$ od pravej strany štvorca. Priesečník uhlopriečok nám poskytuje referenčný bod potrebný na príslušné rozdelenie štvorca. Geometrický i analytický dôkaz tejto skutočnosti sú podané v spomínanej kapitole.

Ak teda vieme rozdeliť hranu štvorca na n rovnakých častí, vieme ju rozdeliť i na $n+1$ rovnakých častí. V istom zmysle je táto metóda rekurentná.

Iný populárny spôsob delenia hrany papiera (alebo papierovej pásky a pod.) na nepárny počet zhodných častí, zvaný Fujimotova aproximačná metóda, je prezentovaný v kapitole *Activity 2: Dividing a length into equal Nths: Fujimoto approximation*. Ide o metódu síce približnú, no dostatočne presnú, flexibilnú a rýchlu.

Majme hárok papiera. Hornú vodorovnú hranu berieme ako úsečku jednotkovej dĺžky, ktorú máme rozdeliť napríklad na päť rovnakých častí. Ľavý horný roh označme ako bod L , pravý horný roh ako P . Zostrojme štartovací bod S_0 odhadom vymedzujúci vzdialenosť jedna pätina od bodu L . Keďže ide o odhad, nech veľkosti príslušných úsečiek sú $|LS_0|=1/5+E$ a $|S_0P|=4/5-E$. E je nepresnosť, s ktorou sme jednu pätinu

odhadli. Zložením papiera nájdeme stred úsečky S_0P a označíme ho ako bod S_1 . Máme $|S_1P| = 2/5 - E/2$. Teraz nájdeme stred úsečky S_1P a označíme ho ako bod S_2 . Máme $|S_2P| = 1/5 - E/4$. „Päťtinová“ úsečka sa ocitla na pravej strane papiera. Naľavo od nej je úsečka veľkosti $(4/5 + E/4)$. V ďalšom kroku nájdeme stred úsečky LS_2 a označíme ho ako bod S_3 . Platí $|LS_3| = 2/5 + E/8$. Nakoniec nájdeme stred úsečky LS_3 a označíme ho ako bod S_4 . Platí $|LS_4| = 1/5 + E/16$.



Obr. 27 Fujimotova metóda delenia úsečky na päťtiny

Ak sme mali šťastie a jednu päťtinu sme odhadli presne, bod S_4 ľahne na bod S_0 . Zvyčajne sú však body S_0 a S_4 navzájom rôzne. Úsečka LS_4 predstavuje oveľa lepšiu realizáciu „päťtinovej“ úsečky ako úsečka LS_0 . Ak však ešte nie sme s presnosťou spokojní, môžeme celý cyklus zopakovať, štartujúc teraz s úsečkou LS_4 . Po druhom cykle dostaneme úsečku dĺžky $(1/5 + E/256)$, po treťom $(1/5 + E/4096)$, po n -tom $(1/5 + E/16^n)$. S rastúcim n dĺžka zostrojenej úsečky rýchlo konverguje k jednej päťtine.

Fujimotovu metódu si môžeme názorne predstaviť ako postupné predlžovanie a skracovanie úsečky LS posúvaním značky (záhybu) S vymedzujúcej jej dĺžku doprava alebo doľava podľa presne daných pravidiel, až kým úsečka nedosiahne požadovanú veľkosť. Nová poloha značky (nový záhyb) je podľa predpisu vždy v strede medzi starou polohou a pravým alebo ľavým okrajom papiera. Pri posune značky doprava dĺžka sledovanej úsečky narastie z hodnoty l na $(1+l)/2$, pri posune doľava poklesne na

$l/2$. V tejto situácii je výhodné použiť pre zápis dĺžky úsečky dvojkovú sústavu. Ak totiž pôvodná veľkosť úsečky je $(0,abc\dots)_2$, veľkosť predĺženej úsečky $(1+l)/2$ bude $(0,1abc\dots)_2$ a veľkosť skrátenej úsečky $l/2$ bude $(0,0abc\dots)_2$. Vytvorenie nového záhybu v strede ľavej alebo pravej časti papiera a takto realizované skrátenie alebo predĺženie sledovanej úsečky sa ukazuje ekvivalentným vsunutiu číslice 0 alebo 1 na začiatok (hneď za desatinnú čiarku) binárneho zápisu pôvodnej dĺžky úsečky.

Konkrétne, pri hore opísanej metóde delenia papiera na pätiny, sledovaná úsečka LS nadobudne dĺžku $|LS_4| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (1 + |LS_0|) \right) \right) \right)$. Ak veľkosť úsečky LS_0 je $(0,ijk\dots)_2$, potom veľkosť úsečky LS_4 je $(0,0011ijk\dots)_2$. Po druhom cykle dostaneme úsečku LS_8 s veľkosťou $(0,00110011ijk\dots)_2$. Vidíme, že pri opakovaní cyklov dĺžka výslednej úsečky konverguje k číslu $(0,001100110011\dots)_2 = (0,\overline{0011})_2$. Vodorovná čiara nad číslicami znamená periodické opakovanie. Prevedením čísla $(0,\overline{0011})_2$ do desiatkovej sústavy dostaneme $1/5$. Vidíme, že použitá postupnosť krokov skutočne v limite vedie k úsečke dĺžky $1/5$ nezávisle od toho, ako presne sme vybrali štartovaciu úsečku.

Postupnosť krokov, teda predpis ktorú časť papiera, pravú alebo ľavú, v danom kroku rozpolíme, a nie výber štartovacej úsečky, jednoznačne určuje počet častí, na ktoré papier rozdelíme.

Cyklus, pozostávajúci z dvoch krokov, rozpoltenia najprv pravej a potom ľavej časti papiera, vedie v limite k číslu $(0,\overline{01})_2$, čo je $1/3$. Daný postup skutočne vedie k rozdeleniu papiera na tretiny.

A naopak, binárny zápis požadovanej hodnoty relatívnej dĺžky úsečky nám určí postupnosť krokov potrebných na „pozohýnanie“ danej úsečky. Napríklad, binárny zápis $1/7$ je $(0,\overline{001})_2$. To znamená, že po zadaní štartovacej úsečky v jednom cykle najprv raz rozpolíme pravú časť papiera a potom dvakrát ľavú.

Po zvládnutí delenia hárku papiera na n rovnakých častí možno pristúpiť k zložitejším deleniam. V *Activity 5: Can Origami Trisect an Angle?* Hullovej knihy [1] sa vysvetľuje, ako rozdeliť stranu štvorca na dve časti, pomer dĺžok ktorých je $\sqrt[3]{2}$.

Táto konštrukcia je ekvivalentná vyriešeniu klasickej úlohy zdvojenia kocky, čo je problém neriešiteľný použitím pravítka a kružidla.

Štvorec papiera rozdelíme horizontálnymi záhybmi na tretiny. Potom použijeme operáciu (axiómu) 6. Zohneme papier tak, že pravý dolný roh štvorca ľahne na ľavú stranu štvorca a súčasne priesečník pravej strany a dolného horizontálneho záhybu ľahne na horný horizontálny záhyb. Možno ukázať, že bod ľavej strany štvorca, na ktorý pri takejto operácii ľahne pravý dolný vrchol štvorca, delí danú stranu štvorca na dve časti v pomere 1 ku $\sqrt[3]{2}$.

Záver

Ak za vytvorením záhybu na kuse papiera vidíme zostrojenie priamky, získavame zaujímavý nástroj objavovania a efektívny spôsob demonštrovania geometrických pojmov a vzťahov. Skladanie papiera môžeme potom použiť ako pomôcku pri prednáškach a cvičeniach z geometrie a s istou mierou fantázie a tvorivosti nám poslúži i pri výučbe algebry, analýzy či iných matematických disciplín.

Cieľom bakalárskej práce bolo zoznámiť sa s matematikou spojenou s origami a zhromažďovať didakticky využiteľné námety a príklady spájajúce skladanie papiera a matematiku.

Práca je rozčlenená do viacerých častí. Kapitola *Čo je origami ?* sa stručne venuje definovaniu základných pojmov, načrtáva pôvod a históriu umenia skladania papiera. Popisuje sa tu začiatok spájania origami s matematikou a prezentujú sa výsledky dosiahnuté vo vybraných smeroch. Pri oboznamovaní sa s touto problematikou sa náš záujem sústredil na dve významné oblasti – axiómy skladania papiera a matematické vlastnosti obrazcov vytváraných záhybmi na hárku papiera pri opatrnom rozložení origami modelov. Pomocou origami axiém (elementárnych, ďalej nerozložiteľných operácií) možno konkrétne realizovať prakticky všetky konštrukcie euklidovskej rovinnej geometrie. No poslúžia i pri riešení kvadratickej či kubickej rovnice pomocou skladania papiera. Matematické vlastnosti záhybových vzorov sú dôležité z „praktického“ hľadiska – pri navrhovaní modelov origami pomocou počítača. Tieto znalosti sa uplatňujú i v inžinierskej praxi.

Kapitola *Využitie origami v praxi* sa zaoberá, ako to naznačuje už jej názov, praktickými aplikáciami teoretických poznatkov získaných pri štúdiu skladania papiera. Spomínajú sa tu skladané jadrá sendvičových panelov, uplatnenie poznatkov o „zložiteľnosti naplocho“ pri návrhu automobilových airbagov, skladanie veľkoplošných objektov podľa pravidiel origami do ľahko transportovateľných maloobjemových kontajnerov, arteriálne stenty zachraňujúce svojim „rozvinutím sa“ ľudské životy, i trochu nezvyčajné nanoobjekty vytvorené riadeným ohýnaním dlhých DNA reťazcov.

Jadrom práce je kapitola *Origami v pedagogike*. Po krátkom vstupe o možnom prínose skladania papiera pre vzdelávací proces nasledujú konkrétne didakticky využiteľné príklady. Vzhľadom na limitovaný rozsah bakalárskej práce uvedené sú len niektoré z veľkého počtu zozbieraných námetov. S prihliadnutím na odporúčanú

literatúru, vyber sa obmedzil na témy z knihy T. Hulla [1]. Ich obsah sme však často doplnili a rozšírili materiálom z iných zdrojov. Keďže nebola určená konkrétna téma „výučby“, prezentované príklady predstavujú malú, subjektívne zvolenú vzorku. Najviac priestoru sa venuje jednej z kužeľosečiek - parabole. Začína sa návodom ako pomocou ohýbania papiera zostrojiť parabolu buď bod po bode alebo ako obálku množiny dotyčníc. Uvedené praktické návody sú následne podložené matematickým rozborom. Diskutuje sa možnosť simulovania skladania papiera pomocou počítačového programu GeoGebra. Ako ilustrácia slúži počítačom zostrojená parabola ako obálka množiny dotyčníc. V ďalšej časti kapitoly sa prezentuje riešenie kvadratickej rovnice pomocou skladania papiera. Metóda sa opiera o poznatky a postupy súvisiace s konštrukciou paraboly. Nasleduje riešenie kubickej rovnice, založené na zostrojení spoločnej dotyčnice dvoch parabol jediným ohnutím papiera. Matematický rozbor ukazuje prečo a ako daná metóda funguje. Záver kapitoly je venovaný deleniu hárku papiera na rovnaké časti ako presnému tak i približnému, pomocou takzvanej Fujimotovej aproximačnej metódy. Demonštruje sa ekvivalencia jednotlivých krokov Fujimotovej metódy a vsúvania číslíc nula a jedna do binárneho zápisu čísel menších ako jedna. Vďaka tejto ekvivalencii binárny zápis relatívnej dĺžky úsečky jednoznačne určuje postupnosť ohýbaní hárku papiera vedúcich k úsečke požadovanej dĺžky. Stručne sa spomína problém zdvojenia kocky, presnejšie povedané, rozdelenie hrany papiera na dve časti v pomere $1:\sqrt[3]{2}$.

Každý z príkladov uvedených v tejto kapitole bol zvyčajne zostavený z parciálnych príspevkov z rôznych zdrojov. Kvôli konzistentnosti výkladu a kompatibilitate jednotlivých častí bolo často nutné modifikovať matematickú analýzu podávanú príslušnými publikáciami a obvykle ju i doplniť originálnym rozborom. Týka sa to hlavne pasáží venovaných riešeniu kvadratickej či kubickej rovnice metódou origami, v malej miere tiež Fujimotovej metódy delenia hrany papiera na časti.

Príloha bakalárskej práce obsahuje stručný popis programu GeoGebra.

Skladanie papiera predstavuje jednu z nádejných ciest, ako urobiť vyučovanie matematiky zaujímavejším, ako doň vniesť prvok názornosti, samostatného objavovania, aktívnej skúsenosti. Vyžaduje si však iniciatívny a tvorivý prístup učiteľa, keďže neexistujú a asi ani nemôžu existovať univerzálne návody, cvičenia, aktivity. Je potrebné vedieť, aká je úroveň vedomostí príslušnej skupiny študentov, aké sú ich mentálne danosti, čo konkrétne ich chceme naučiť a podobne. Potom treba vybrať

vhodné prvky z pestrej zmesi dostupných materiálov a prispôbiť ich svojim potrebám a predstavám.

Zoznam použitej literatúry

- [1] HULL, Thomas: Project Origami: Activities for Exploring Mathematics. Wellesley, MA: A.K.Peters, Ltd., 2006. il. ISBN 13: 978-1-56881-258-8; ISBN 10: 1-56881-258-2
- [2] Joseph Wu Origami Inc. [online]. Aktualizované 26-06-2008 [cit. 2009-10-06]. Dostupné na internete: <<http://www.origami.as/home.html>>.
- [3] SMITHOVÁ, Soonboke: Začíname s origami. Banská Bystrica: Ikar, 2007. il. ISBN 978-80-551-1380-7
- [4] SCHRÖDER, Jens: Majstri ohýbania. In: GEO 3/09, s. 66-78.
- [5] <<http://www.origami.cz/welcome.html>> [cit. 2009-10-08].
- [6] ISO 690-2: 1997, Information and documentation – Bibliographic references - Part 2: Electronic documents or parts thereof.
- [7] ThinkQuest: Pieces ,n Creases [online]. Aktualizované 09-06-1999 [cit. 2009-10-08]. Dostupné na internete: <<http://library.thinkquest.org/5402/index.html>>.
- [8] HATORI, Koshiro. History of Origami. In K's Origami [online]. [cit. 2009-10-16]. Dostupné na internete: <<http://origami.ousaan.com/library/historye.html>>.
- [9] ROW, Sundara T.: Geometrical Excercises in Paper Folding. Madras: Addison & Co., 1893. Dostupné na internete: <<http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-id?c=umhistmath;idno=ACV5060.0001.001>>.
- [10] LANG, Robert J. 2003. Origami and Geometric Constructions [online]. Nepublikovaný rukopis, 2003 [cit. 2010-01-05]. Dostupné na internete: <<http://www.langorigami.com/science/hha/hha.php4>>.
- [11] ALPERIN, Roger C. – LANG, Robert J.: One-, Two-, and Multi – Fold Origami Axioms. In: Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education. Natic, MA: A.K.Peters, Ltd., 2009. s. 371-394.
- [12] HULL, Thomas: Solutions (of a Sort) to the Origami Quiz. In: The Mathematical Intelligencer. roč. 26, č. 4 (2004), s. 61-63.
- [13] ALPERIN, Roger C.: A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. In: New York Journal of Mathematics. roč. 6 (2000), s. 119-133. Dostupné na internete: <<http://nyjm.albany.edu/>>.
- [14] LANG, Robert J. – DEMAINE, Eric D.: Facet Ordering and Crease Assignment in Uniaxial Bases. In : Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education. Natic, MA: A.K.Peters, Ltd., 2009. s. 189 – 206
- [15] HULL, Thomas C.: Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art by Robert. J. Lang. In: The Mathematical Intelligencer. roč. 27, č.2 (2005), s. 92-95.
- [16] FISCHER, Sebastian et. al.: Mechanical tests for foldcore base material properties. In: Composites: Part A. roč. 40, č. 12 (2009), s. 1941-1952.

- [17] LANG, Robert J.: Airbag Folding [online]. [cit. 2009-10-22]. Dostupné na internete: <<http://www.langorigami.com/science/airbag/airbag.php4>>.
- [18] LANG, Robert J.: Origami: Complexity in Creases (Again) [online]. In: Engineering and science. California Institute of Technology, 2003. Dostupné na internete: <<http://pr.caltech.edu/periodicals/EandS/articles/LXVII1/origami.html>>.
- [19] BRITT, Robert Roy. 2002. Origami Astronomy: The Art and Science of a Giant Folding Space Telescope [online]. Uverejnené 20-02-2002 [cit. 2009-11-09]. Dostupné na internete: <http://www.space.com/businessstechnology/technology/origami_design_020220-1.html>.
- [20] LANG, Robert J.: Eyeglass, Origami in Space [online]. [cit. 2009-10-22]. Dostupné na internete: <<http://www.langorigami.com/science/eyeglass/eyeglass.php4>>.
- [21] YOU, Zhong – KURIBAYASHI, Kaori: A Novel Origami Stent. In: 2003 Summer Bioengineering Conference.
- [22] LANG, Robert J.: Flapping Birds and Space Telescopes [online]. Prednáška 2008 [cit. 2009-10-22]. Dostupné na internete: <http://www.ted.com/talks/lang/eng/robert_lang_folds_way_new_origami.html>.
- [23] ROTHEMUND, Paul W.K.: Folding DNA to Create Nanoscale Shapes and Patterns. In: Nature. roč. 440 (2006), s.297-302.
- [24] KERSHNER, Ryan J. et. al.: Placement and orientation of individual DNA shapes on lithographically patterned surfaces [online]. In: Nature Nanotechnology. Publikované 16-08-2009 [cit. 2009-11-09]. Dostupné na internete: <www.nature.com/naturenanotechnology>.
- [25] ANDERSEN, Ebbe S. et. al.: Self – assembly of a nanoscale DNA box with a controllable lid. In: Nature. roč. 456 (2009), s. 73-76.
- [26] SZARKOVÁ, Dagmar RNDr.: Kuželosečky [online]. Aktualizované 05-04-2001 [cit. 2009-12-13]. Dostupné na internete: <<http://www.km.sjf.stuba.sk/data/Geometria/skripta/Kuzeloseckyw.html>>.
- [27] ŠALÁT, Tibor et. al.: Malá encyklopédia matematiky. Bratislava: Obzor, 1981.
- [28] OLSON, Alton T.: Mathematics Through Paper Folding [online]. Reston, VA: NCTM, 1975. Dostupné na internete: <<http://www.vidyaonline.net/arvindgupta/paperfolding.pdf>>.
- [29] HOHENWARTER, Judith – HOHENWARTER, Markus: Introduction to GeoGebra [online]. Aktualizované: 19-07-2008 [cit.2009-12-13]. Dostupné na internete: <<http://www.geogebra.org/book/intro-en.zip>>

Prílohy

Príloha A: GeoGebra

Príloha A: GeoGebra

Materiál v tejto prílohe pochádza výlučne z publikácie [29].

Informácie o GeoGebre

GeoGebra je dynamický matematický softvér určený pre vyučovanie na školách, ktorý spája geometriu, algebru a matematickú analýzu.

Na jednej strane je GeoGebra interaktívny geometrický systém. Môžeme pomocou neho zostrojiť body, vektory, úsečky, priamky, kužeľosečky ako aj funkcie a následne ich dynamicky meniť.

Na druhej strane môžeme rovnice a súradnice zadať priamo. Takto dokáže GeoGebra pracovať a počítat' s premennými pre čísla, vektory a body. Dokáže nájsť deriváciu a integrál funkcií a ponúka príkazy ako je *Koreň* alebo *Odmocnina*.

Inštalácia GeoGebry

Vytvorte na pracovnej ploche svojho počítača nový folder s názvom *GeoGebra_Introduction*. Počas práce ukladajte všetky súbory do tohto foldru, aby ste ich neskôr vedeli bez problémov nájsť.

Ak máte prístup na internet, nainštalujte na svoj počítač program GeoGebra WebStart nasledujúcim spôsobom. Otvorte svoj internetový prehliadač a choďte na stránku www.geogebra.org/webstart. Kliknite na tlačítko s názvom *GeoGebra WebStart*. Softvér sa automaticky nainštaluje na váš počítač. Potrebujete potvrdiť všetky odkazy, ktoré sa objavia, pomocou *OK* alebo *Áno*.

Použitie GeoGebra WebStart vám ponúka množstvo výhod:

- Nemusíte manipulovať s rôznymi súbormi, pretože GeoGebra sa automaticky nainštaluje na váš počítač.
- Nepotrebujete zvláštne užívateľské povolenia na používanie GeoGebra WebStartu, čo je predovšetkým užitočné pre počítačové laboratória a laptopy v školách.
- Keď už je GeoGebra WebStart nainštalovaný, môžete softvér využívať aj keď nie ste pripojení na internet.

- Pokiaľ máte prístup na internet po počiatočnej inštalácii, GeoGebra WebStart pravidelne hľadá dostupné aktualizácie a automaticky ich nainštaluje. Takže stále pracujete s novou verziou GeoGebry.

Pokiaľ nemáte prístup na internet, je GeoGebru možné nainštalovať aj z USB kľúča alebo CD. Skopírujte inštalačný súbor z pamäťovej jednotky do vytvoreného GeoGebra_Introduction foldra na vašom počítači.

Na nainštalovanie softvéra kliknite dvakrát na GeoGebra inštalačný súbor a postupujte podľa pokynov inštalačného asistenta.

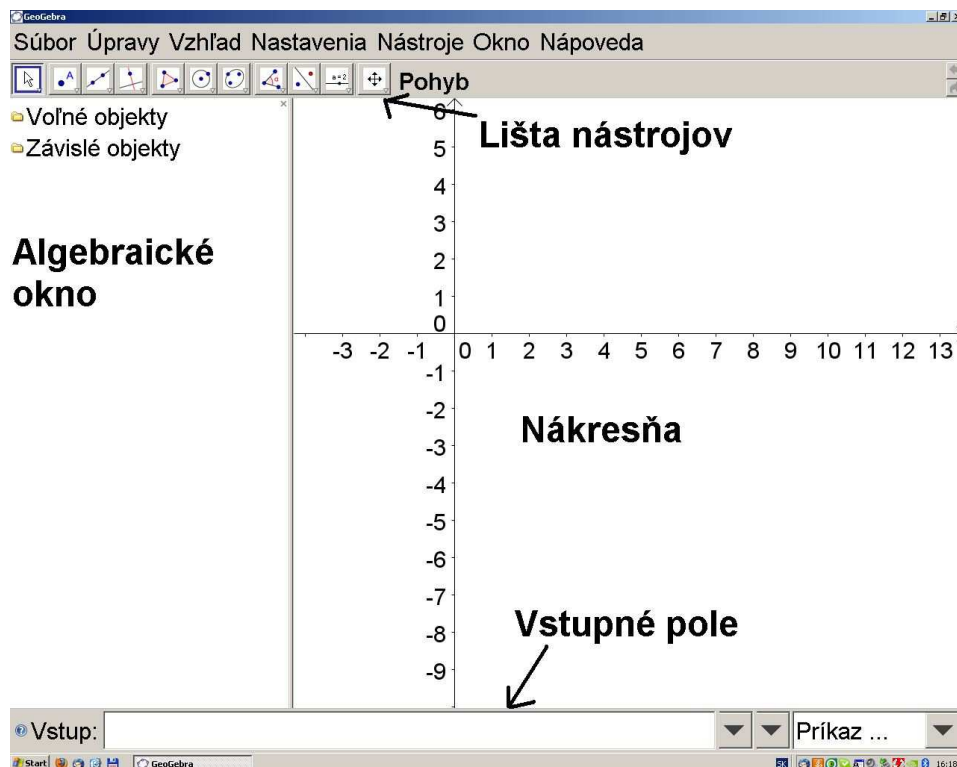
Uistite sa, že máte správnu verziu pre váš operačný systém, napr. GeoGebra_3_0_0_0.exe (MS Windows) alebo GeoGebra_3_0_0_0.zip (MacOS).

Uloženie sprievodných súborov

Stiahnite zazipovaný súbor z www.geogebra.org/book/intro-en.zip a uložte ho do vášho GeoGebra_Introduction foldra. Rozbaľte súbory vo vašom počítači. V závislosti od vášho operačného systému, existujú rôzne spôsoby ako to urobiť. Pre *MS Windows XP* kliknite na zazipovaný súbor pravým tlačítkom a postupujte podľa pokynov Extraction Wizarda. Pre *MacOS* kliknite dvakrát na zazipovaný súbor.

Užívateľské rozhranie v GeoGebre

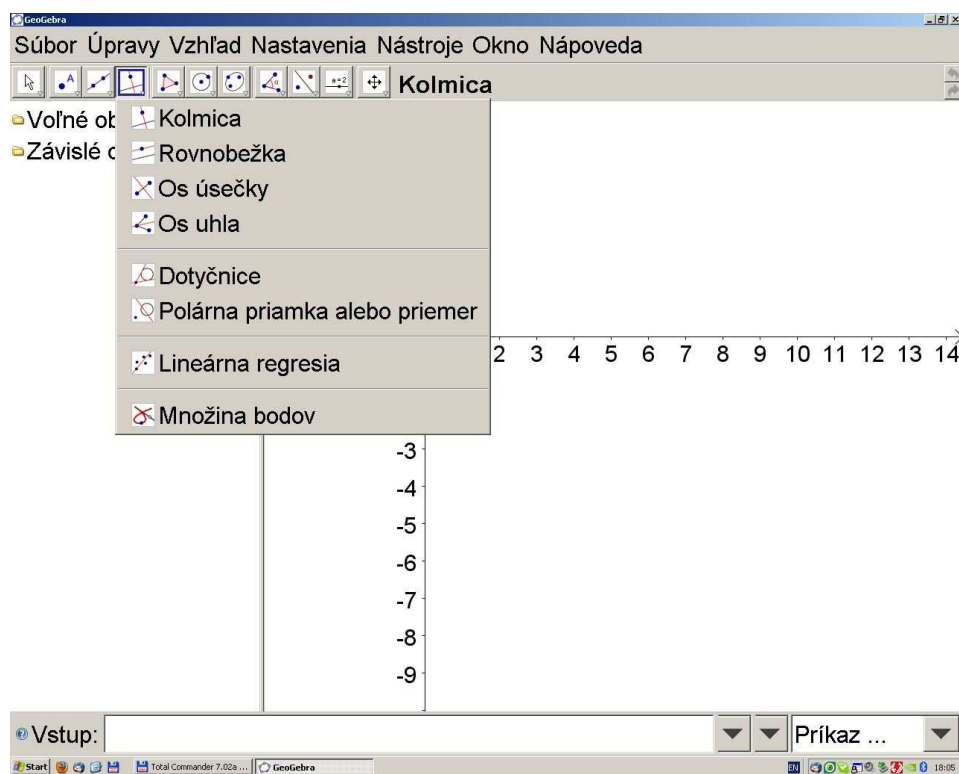
Po naštartovaní GeoGebry sa objaví okno zobrazené nižšie. Pomocou konštrukčných nástrojov na *lište nástrojov* môžete robiť konštrukcie na *nákresni* pomocou myši. Zároveň sa zodpovedajúce súradnice a rovnice zobrazia v *algebraickom okne*. *Vstupné textové pole* sa používa na priame zadávanie súradníc, rovníc, príkazov a funkcií; tie sa zobrazia na nákresni ihneď po stlačení tlačítka enter. Geometria a algebra bok po boku:



Obr. 28 Uživatelské rozhranie GeoGebry s popisom

Základné využitie nástrojov

- Aktivujte nástroj kliknutím na tlačítko, ktoré zobrazuje zodpovedajúcu ikonku.
- Otvorte tabuľku s nástrojmi kliknutím na spodnú časť tlačítka a vyberte ďalší nástroj z tejto tabuľky nástrojov.
- Rada: Nemusíte otvoriť tabuľku nástrojov vždy, keď chcete vybrať nástroj. Ak je ikonka želaného nástroja už zobrazená na tlačítku, môžete ho aktivovať priamo.
- Rada: Tabuľky nástrojov obsahujú podobné nástroje alebo nástroje, ktoré vytvárajú rovnaký druh nového objektu.
- Skontrolujte nápovedu nástrojovej lišty, aby ste zistili, ktorý nástroj je práve aktivovaný a ako s ním narábať.



Obr. 29 Ukážka nástrojov v GeoGebre