

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

WORKSHOPOVÁ METÓDA A ORIGAMI VO VYUČOVANÍ
MATEMATIKY

Diplomová práca

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

**WORKSHOPOVÁ METÓDA A ORIGAMI VO VYUČOVANÍ
MATEMATIKY**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný program:	Anglický jazyk a literatúra - Matematika
Pracovisko (katedra/ústav):	Ústav matematických vied
Vedúci diplomovej práce:	RNDr. Martina Hančová, PhD.

Košice 2012

Bc. Adela KUPKOVÁ

Abstrakt

Cieľom práce bolo vytvoriť niekoľko príkladov využitia skladania papiera (origami) na výuku niektorých častí matematiky vo workshopovom formáte. Teoretická časť práce obsahuje stručný popis hlavných znakov workshopovej metódy a krátke charakteristiky prístupov dvoch skupín reálne vyučujúcich matematiku workshopovou metódou. Táto časť taktiež stručne predstavuje origami a najvýznamnejšie spôsoby jeho využitia pri výučbe matematiky. Praktická časť diplomovej práce ponúka motivačný workshop zdôrazňujúci prínos aký malo zvládnutie skladania papiera a matematizácia tohto procesu pre praktický život, poskytuje príklady vyučovania Pytagorovej vety, množiny vrcholov daných uhlov zostrojených nad danou úsečkou a postupnosti workshopovou metódou s využitím skladania papiera, stručne informuje o výsledkoch pilotného testovania niekoľkých príkladov.

Kľúčové slová: Workshopová metóda, origami, Pytagorova veta, Talesova kružnica, postupnosti

Abstract

The aim of the diploma thesis was to create several examples of the usage of paper folding (origami) for teaching some mathematical topics in a workshop format. The theoretical part of the thesis consists of brief description of the main features of workshop method and short characteristics of the approaches of two groups that actually teach mathematics using workshop method. This part also briefly introduces origami and the most important ways of its usage for teaching mathematics. The practical part of diploma thesis offers the motivation workshop that emphasises the contribution that mastering of paper folding and mathematization of this process had for the real life, provides examples of teaching Pythagorean theorem, the locus of points from which a given line segment is seen in a given angle, and sequences by the workshop method using the paper folding, and briefly informs about the results of pilot testing of several examples.

Key words: Workshop method, origami, Pythagorean theorem, Thales circle, sequences

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som celú diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Košice, 20.4.2012

.....

vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcej mojej diplomovej práce, RNDr. Martine Hančovej, PhD., za pripomienky a odbornú pomoc pri vypracovaní práce. Ďalej ďakujem pani riaditeľke ZŠ Želiarska 4 v Košiciach Mgr. Vieri Kulikovej a učiteľom matematiky Mgr. Vladimírovi Čáňimu a Mgr. Marte Pomothyovej za to, že mi na svojich hodinách umožnili otestovať vybrané témy mojej práce.

Obsah

Úvod	7
1 Vyučovanie matematiky workshopovou metódou	11
1.1 Workshopový model vyučovania matematiky propagovaný centrom Mathematics in the City na The City College of New York.....	12
1.2 Workshopová matematika na Dickinson College	15
2 Využitie origami vo vyučovaní matematiky	19
2.1 Origamics	22
2.2 Origametria.....	24
2.3 Niekoľko poznámok na záver.....	26
3 Sprievodca aktivitami	28
3.1 Ak vieme dobre poskladať papier, vieme dobre poskladať i mnohé iné veci, alebo prínos origami pre prax.....	30
3.2 Pytagorova veta	39
3.3 Množina vrcholov daných uhlov zostrojených nad danou úsečkou.....	55
3.4 Postupnosti	67
4 Pilotné testovanie.....	76
Záver	78
Zoznam použitej literatúry	79
Prílohy.....	83
Príloha A: Ukážka z „Workshop Calculus“.....	84

Úvod

Pre ľudí, ktorí sa venujú vede či pracujú v technickom výskume a vývoji je jasné, logické myslenie, schopnosť dedukovať, prísne rozlišovať medzi príčinami a následkami, nevyhnutné. Schopnosť deduktívneho myslenia by však nemala chýbať nijakému diagnostikovi v širšom zmysle – či už vyšetrovateľovi, právnikovi, opravárovi automatických pračiek, automechanikovi alebo lekárovi (Brunovský, 2002). Viest' väčšinu populácie k racionálnemu mysleniu predstavuje hlavnú úlohu vyučovania matematiky na základných či stredných školách.

Žiaci sa prakticky už od prvých dní v školských laviciach učia počítat'. S ďalšími „exaktnými“ predmetmi sa zoznámia oveľa neskôr. V rokoch dôležitých pre rozvoj intelektu detí je preto „po ruke“ jedine matematika. Toto postavenie matematiky vystihol profesor Brunovský: *„Nemám to z prvej ruky, ale výskumy ukazujú, že sa niektoré schopnosti mozgu musia tréningom aktivovať, aby začali fungovať – a na čom inom, ako na matematike to u detí, ktoré ešte majú obmedzený rozsah poznatkov robiť?“* (Brunovský, 2002).

Snaha učiť myslieť sa však zväčša míňa účinkom. Príčinu nežiaduceho stavu vidí väčšina odborníkov v spôsobe, ako sa matematika vyučuje. Panuje všeobecná zhoda v tom, že cieľom vyučovania je pomôcť študentom učiť sa. Vyučovanie učiteľmi a učenie sa žiakmi sú však veľmi často videné ako dva oddelené, na opačných póloch stojace procesy.

Vyučovanie je to, čo robia učitelia. Predpokladá sa, že učitelia ovládajú odbornú náplň svojho predmetu a sú schopní predkladať žiakom hotové, dobre utriedené a systematizované poznatky a optimalizované riešiteľské postupy. Učiť sa je úlohou žiakov. Očakáva sa od nich, že budú počúvať, aby porozumeli a pochopili, že budú tvrdo pracovať, aby si osvojili učivo precvičovaním a vyriešením série vhodne zvolených úloh.

Bohužiaľ, väčšina žiakov nejde náročnou cestou riešenia mnohých úloh, radšej sa snažia novú informáciu si jednoducho zapamätať. Učia sa naspamäť vzorce, poučky, postupy, dokonca i dôkazy. Príslušné úlohy potom neriešia tak, že o postupe premýšľajú, ale napodobovaním naučených postupov. Tak vzniká formálne poznanie (Hejný, 2004, 1996). Zhruba povedané, žiaci ovládajú algoritmus sčítania či násobenia, no nevedia, či pre to, aby našli riešenie danej (slovnej) úlohy majú sčítať alebo násobiť.

Východiskom je podľa mnohých pedagógov zmena štýlu vyučovania. Žiaci by mali prestať byť pasívnymi prijímateľmi hotových poznatkov, mali by hrať aktívnu úlohu. Mali

by sami pre seba znovuobjaviť matematiku. Od žiakov sa očakáva, že na vzťahy, zákonitosti, princípy budú prichádzať sami – aj keď väčšinou s určitou cudzou pomocou (vedením) alebo po zvláštnej príprave. Z „vykonávateľov inštrukcií“ by sa tak zmenili na „prieskumníkov pátrajúcich po štruktúrach a pravidelnostiach v okolitom svete.“

Časom overený príklad aktivizujúcej formy vyučovania preferujúcej tvorivosť, kde hlavnú úlohu hrá žiak či študent a učiteľ úlohu pomocnú, ponúklo kreatívne písanie. Kreatívne písanie vzniklo v prvých desaťročiach dvadsiateho storočia ako pokus priblížiť vyučovanie literatúry spôsobu, akým literárne diela skutočne vznikajú. S kreatívnym písaním sa historicky spája formát výuky, v ktorom vyučovacia hodina je dobou aktívneho tvorenia, konštruktívnych diskusií a zodpovedného posudzovania dobrých a zlých stránok vytvorených literárnych dielok, dobou, počas ktorej sa skupina študentov delí o svoje poznatky a vymieňa si skúsenosti – workshopová metóda (Bizzaro, 2010).

V tomto spôsobe výuky kreatívneho písania trieda funguje ako laboratórium, kde žiaci experimentujú s jazykom. Výsledky svojich experimentov predstavia svojim rovesníkom a vypočujú si ich názor na silné a slabé stránky svojho diela. Na základe odozvy primárne od ostatných žiakov pisateľa opravia svoje literárne diela a opätovne ich prezentujú. Učiteľ je pri tom v úlohe moderátora a pomocníka (facilitátora). Jeho cieľom je viesť žiakov k tomu, aby boli tvorcami literatúry a literárnymi kritikmi.

Učitelia rôznych predmetov adaptovali workshopovú metódu podľa svojich potrieb (napr. (Laws, 1991)). Jednotlivé mutácie sa môžu odlišovať a aj sa v jednotlivých detailoch líšia, no podstata ostáva – študenti sa aktívnou tímovou prácou, pomocou osobne nadobúdaných skúseností a znalostí dopracujú k výstupom, ktoré sú pre nich užitočné a využiteľné v ďalšej činnosti.

Matematické workshopy sú veľmi podobné workshopom kreatívneho písania. Filozofia oboch vychádza z tej istej teórie, ako sa ľudia učia – z presvedčenia, že poznanie jednotlivca je založené na jeho aktivite, že poznatky vznikajú v prostredí podnecujúcom aktivitu, tvorivosť, diskusiú, starostlivé premýšľanie o veciach (Fosnot a Dolk, 2002).

Podstatou a spoločným znakom matematických workshopov je, že žiaci sú vtiahnutí do riešenia matematických problémov. Vyšetrujú, skúmajú, konštruujú, diskutujú. Predkladajú svoje matematické idey a stratégie riešenia na posúdenie kolektívu rovesníkov, zdôvodňujú ich a obhajujú. Argumentujú.

Keď sú výskumy ukončené, výsledky a závery spísané, žiaci ich prezentujú a obhajujú v rôznych celoskupinových aktivitách, ako sú „matematický kongres“ (Fosnot

a Dolk, 2002), (Fosnot a Jacob, 2010), „sumarizujúca beseda“ (Hastings a Reynolds, 1999), a podobne.

Organickou súčasťou workshopovej metódy sú krátke vstupy učiteľa. Zvyčajne na začiatku hodiny, no ak je to nutné, tak i počas nej, keď učiteľ považuje za potrebné prezentovať doplňujúci teoretický materiál, objasniť stratégiu výpočtu, podeliť sa o prístup k riešeniu problému, rozobrať historický dôkaz, a podobne (miniprednášky (Fosnot a Dolk, 2002), úvodný komentár, sumarizujúca beseda (Hastings a Reynolds, 1999)).

Počas matematických workshopov žiaci bežne manipulujú s rôznymi objektmi, či už reálnymi na pracovných stoloch alebo virtuálnymi v počítačoch. Skúmajú objekty z rôznych uhlov pohľadu a v rôznych situáciách, merajú ich, rozoberajú, delia a skladajú, združujú do skupín, začleňujú do väčších a zložitejších celkov.

Využívanie rôznych pomôcok však nie je výlučnou výsadou workshopovej metódy vyučovania. Učitelia ich používajú i na klasických hodinách matematiky. Chcú nimi vzbudiť záujem žiakov spestriť vyučovanie, urobiť ho názornejším, zapojiť do poznania viaceré zmysly.

Pre účely vzdelávania možno využiť takmer všetko – pôvodné alebo mierne upravené prírodné objekty, modely, stavebnice, hračky, bežné kancelárske potreby i obyčajný papier, ktorý možno strihať či skladat.

Papier predstavuje vďačnú vyučovaciu pomôcku. Je dostupný, lacný, jeho skladanie je manuálna činnosť, ktorá je u detí pomerne obľúbená. Skladanie papiera zamestnáva viac zmyslov, čím získavanie poznatkov nadobúda viac zmyslový charakter.

Ak záhyb vytvorený zložením papiera predstavuje „priamku“ a priesečník dvoch záhybov „bod“, máme možnosť využiť skladanie papiera na rôzne geometrické konštrukcie, na ilustráciu a „materializáciu“ klasickej geometrie.

Všetky konštrukcie rovinnej Euklidovej geometrie, bežne zostrojované pomocou pravítka a kružidla, možno realizovať pomocou záhybov (Row, 1901), (Johnson, 1957). Pre zaujímavosť, pomocou skladania papiera možno uskutočniť i trisekciu uhla či zdvojenie kocky – klasické úlohy neriešiteľné pomocou pravítka a kružidla.

Od skladania papiera vedúceho k dvojrozmerným geometrickým konštrukciám – záhybovým vzorom, možno pokročiť k skladaniu trojrozmerných objektov, k modulárnemu alebo klasickému origami.

Origami je japonské pomenovanie starobylého umenia skladaním jedného kusa papiera vytvárať modely živočíchov, rastlín, figúrky ľudí, či rôzne abstraktné tvary. Modulárne origami je oveľa mladšie. Najprv sa poskladá veľké množstvo rovnakých

stavebných jednotiek – modulov. Z nich sa následne zostaví konečný model, zvyčajne zložitý mnohosten.

Origami vďaka svojej podstate zapája žiakov do procesu, v ktorom sa dvojrozmerný útvar transformuje na trojrozmerný objekt. Možno uskutočniť i obrátenú transformáciu, prejsť od trojrozmerného objektu k jeho dvojrozmernému ekvivalentu. Origami tak ponúka nástroj na tréning priestorovej predstavivosti a prostriedok na ilustráciu priestorovej geometrie.

Zámerom diplomovej práce bolo využiť toto cenovo nenáročné a všeobecne dostupné „experimentálne laboratórium“ – hárok papiera – na uskutočňovanie experimentov v rámci workshopového formátu vyučovania matematiky.

Cieľom predkladanej práce bolo:

1. Naštudovať a popísať základné myšlienky workshopovej metódy.
2. Vytvoriť workshopové aktivity pre výučbu vybraných tém z matematiky s využitím origami.

Diplomovú prácu možno rozdeliť na dve hlavné časti – teoretickú a praktickú.

Teoretická časť práce pozostáva z dvoch kapitol.

Prvá kapitola stručne približuje hlavné princípy a myšlienky workshopovej metódy vyučovania a predstavuje dva konkrétne príklady ich aplikácie pri reálnom vyučovaní matematiky.

Druhá kapitola podáva základné informácie o origami – starobyľom umení skladania trojrozmerných modelov z jedného hárku papiera a o matematizácii skladania papiera. Uvádza taktiež konkrétne prípady použitia origami pri vyučovaní matematiky.

Praktickú časť predstavuje tretia kapitola. Začína časťou, kde sú uvedené hlavné zdroje, formulované spôsoby ich využitia pri získavaní výsledkov, prezentované hlavné súčasti praktickej časti diplomovej práce. Po nej nasleduje sprievodca aktivitami vytvorený pre štyri rôzne tematické časti. Praktickú časť uzaviera kapitola venovaná pilotnému testovaniu niektorých z vytvorených príkladov.

1 Vyučovanie matematiky workshopovou metódou

Z rôznych príčin len málo žiakov vynakladá potrebné úsilie na to, aby porozumeli látke, ktorú im ponúkajú učebnice či na hodine predkladajú učitelia matematiky. Väčšina sa jednoducho snaží zapamätať si definície, poučky, vzorce, postupy riešenia príkladov či dôkazy (Hejný, 1996), (Fosnot a Dolk, 2002). Zdá sa preto, že vzdelávací systém neodvádza svoju prácu dostatočne dobre.

Príčinu tohto nežiaduceho stavu videla väčšina odborníkov v tradičnom spôsobe vyučovania matematiky. Pri tomto štýle vyučovania je centrálnou osobou učiteľ ako zdroj vedomostí a žiak je pasívnym príjemcom. Výuka je zameraná na faktografiu, na nácvik riešiteľských postupov štandardných úloh.

Východisko sa našlo v nahradení pasívnych foriem prijímania poznatkov aktivizujúcimi formami, v ktorých sa dôraz kladie na samostatnú a tvorivú prácu žiakov, formami, v ktorých sa žiaci aktívnym poznávaním dopracovávajú k požadovaným poznatkom sami.

Účinnosť aktivizujúcich vyučovacích modelov sa ešte viac zvyšuje použitím kolaboratívnej formy vyučovania, keď študenti pracujú v skupinách a navzájom diskutujú o svojich postupoch a výsledkoch. Keď študenti pracujú ako tím, sú schopní vyriešiť problém skôr, než sú tak schopní urobiť ako jednotlivci.

Jedným z prístupov k aktivizujúcej kolaboratívnej forme vyučovania je workshopový model (v našej domácej literatúre sa používa aj pojem model tvorivej dielne). Vychádza z poznatku, že žiaci sa najlepšie učia vlastnou aktívnou činnosťou, „robením vecí“. V tomto formáte vyučovania hrajú hlavnú úlohu žiaci, učiteľ ustupuje do pozadia. Jeho úlohou je vytýčiť smer bádania, pripraviť aktivity a inštrukcie, fungovať ako pomocník, poradca či sprievodca.

Podstatou workshopovej metódy vyučovania matematiky, teda tým, čo robí workshopovú metódu workshopovou metódou, je zapájanie žiaka do procesu hľadania, získavania, formulovania či konštruovania poznatkov takým spôsobom, že najprv ako člen malej aktívne spolupracujúcej skupiny robí praktický výskum konkrétnych situácií a problémov buď použitím reálnych prístrojov a predmetov alebo pomocou výpočtovej techniky, následne svoje postupy a výsledky predkladá širšiemu kolektívu rovesníkov na konštruktívne posúdenie a zhodnotenie a svoje tvrdenia a závery pred týmto kolektívom obhajuje.

Spôsoby, akými workshopový model aplikujú v praxi jednotlivé skupiny či „školy“, sa navzájom odlišujú stupňom samostatnosti poznávacej činnosti žiakov.

Vysokú mieru samostatnosti majú žiaci napríklad vo formáte praktizovanom skupinou z The City College of New York vedenou profesorkou Catherine T. Fosnot (Fosnot a Dolk, 2001a, 2001b, 2002), (Fosnot a Jacob, 2010) . V tejto schéme učiteľ na začiatku hodiny krátko uvedie vhodne zvolenú problémovú situáciu. Spôsob, akým potom žiaci pristúpia k riešeniu nastoleného problému, metódy aké si zvolia i konkrétne kroky vedúce k riešeniu sú už viac-menej v réžii ich samotných. Rôzne skupiny žiakov sa takto môžu dopracovať k správne výsledku rôznymi cestami a za rôzne dlhý čas.

V prístupe prezentovanom kolektívom z Dickinson College, sústredenom okolo profesorky Nancy B. Hastings, je miera riadenia vyššia. Žiaci na svojej ceste k poznatkom riešia postupnosť vhodne zvolených na seba nadväzujúcich úloh, vedení inštrukciami v pracovných listoch (Hastings a Reynolds, 1999) (Rossman, 2008).

V súvislosti so stupňom samostatnosti, akú ten-ktorý prístup ponecháva žiakom, sa mierne mení i štruktúra vyučovacej hodiny.

1.1 Workshopový model vyučovania matematiky propagovaný centrom Mathematics in the City na The City College of New York

V tomto modeli vyučovania matematiky má vyučovacia jednotka tri základné časti: uvedenie problémovej situácie mini-prednáškou, samostatná práca žiakov v skupinách, uzavretie (zhrnutie) formou „matematického kongresu“.

- *Mini-prednáška, uvedenie problémovej situácie:* Na začiatku hodiny učiteľ uvedie problémovú situáciu. Táto zvyčajne vychádza z reálneho života a žiaci si ju vedia názorne predstaviť. Kľúčové body a fakty učiteľ zdôrazní ich napísaním či načrtnutím vhodného obrázku na tabuľu (obrázok 1). Dobre zvolenou problémovou situáciou učiteľ dosiahne dve veci: jednak nasmeruje úvahy a bádanie žiakov smerom ktorý ich akoby mimochodom a takmer automaticky privedie k novým pojmom a poznatkom, jednak stanoví konkrétny rámec, ktorý umožňuje žiakom pomocou obrazov reálnych vecí a operácií s nimi premýšľať o tom čo robia a chápať prečo to tak robia.



Obr. 1. Uvedenie problémovej situácie ... (Fosnot a Jacob, 2010).

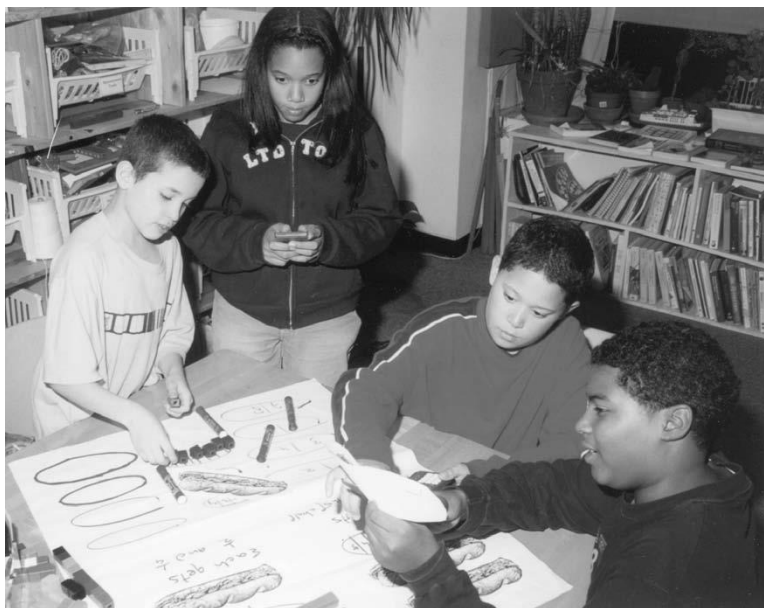
Ako príklad dobre zvolenej problémovej situácie môžeme uviesť problém „spravodlivého delenia bagiet“ z práce (Fosnot a Dolk, 2002).

Žiaci sa počas spomínaného workshopu mali oboznámiť so zlomkami. Učiteľka uviedla hodinu rozprávaním o svojom minuloročnom triednom výlete. Žiaci sa počas neho rozdelili do štyroch rôzne početných skupín, každá z ktorých navštívila rôzne budovy a inštitúcie. Školský bufet pripravil deťom bagety, ktoré si jednotlivé skupiny vzali so sebou. Bagiet však bolo menej ako detí. Prvá štvorčlenná skupina preto dostala tri bagety, druhá skupina piatich detí dostala štyri bagety, osemčlenná skupina dostala sedem bagiet a posledná päťčlenná skupina dostala bagety tri. Na druhý deň pri hodnotení výletu sa niekoľko detí sťažovalo, že rozdelenie bagiet nebolo spravodlivé, že niektoré skupiny dostali viac jedla.

Učiteľka sa s otázkou, či sťažujúce sa deti mali pravdu a rozdelenie bagiet ozaj nebolo spravodlivé, obrátila na svojich terajších žiakov. Vyzvala ich, aby problém preskúmali a sústredili sa pri tom na dve otázky: po prvé, koľko jedla dostalo každé dieťa v jednotlivých skupinách ak delenie v rámci skupiny bolo spravodlivé a po druhé, ktorá skupina dostala najviac.

- *Práca v skupine:* Jadrom workshopu je jeho druhá, na čas najnáročnejšia časť, v ktorej žiaci v skupinách pracujú na riešení nastoleného problému (obrázok 2). Môžu použiť všetky dostupné pomôcky, zvoliť si ľubovoľnú stratégiu riešenia a počas riešenia ju podľa potreby meniť, majú k dispozícii potrebný čas. Učiteľ

prechádza medzi jednotlivými skupinami, reaguje na požiadavky žiakov, prípadne pomôže dobre volenou otázkou dostať sa žiakom zo slepej uličky.



Obr. 2 práca v skupine (Fosnot a Dolk, 2002)

Pri riešení vyššie spomenutého ilustračného problému spravodlivého delenia bagiet sa žiaci postupne samostatne oboznámia s kmeňovými zlomkami, všeobecnými zlomkami, vyrovnajú sa s problémom porovnávania zlomkov, naučia sa niektoré operácie so zlomkami (napríklad, akú časť bagety dostanú, ak polovicu bagety rozdelia na päť častí), a podobne.

- *Uzavretie, „matematický kongres“:* V poslednej, záverečnej časti, na „matematickom kongrese“, jednotlivé skupiny prezentujú formou posterov svoje stratégie a výsledky, odpovedajú na otázky ostatných žiakov, diskutujú, vysvetľujú a obhajujú svoje zistenia a tvrdenia. „Matematický kongres“ môže prebehnúť buď bezprostredne po prvých častiach workshopu, samozrejme po dobe potrebnej na prípravu prezentačných materiálov, alebo sa môže konať až na druhý deň (Obrázok 3).



Obr.3a prezentácia na „matematickom kongrese“. (Fosnot a Jacob, 2010).

1.2 Workshopová matematika na Dickinson College

Workshopový model s vyššou mierou riadenia objaviteľskej činnosti študentov predstavujú inovované úvodné univerzitné kurzy matematiky pod názvom „Workshop Mathematics“, vypracované na Dickinson College kolektívom okolo Nancy B. Hastings. V týchto kurzoch, realizovaných vo workshopovom formáte, sa študenti dopracovávajú k požadovaným poznatkom a vedomostiam plnením série vhodne zvolených na seba nadväzujúcich úloh, postupujúc podľa inštrukcií v pracovných listoch.

Vzorom a inšpiráciou pre „Workshop Mathematics“ bol úspešný program „Workshop Physics“, vypracovaný a realizovaný na Dickinson College už predtým kolektívom okolo Priscilly W. Laws (Laws, 1991), (Redish, 2003). „Workshop Mathematics“ má preto mnohé spoločné prvky s „Workshop Physics“ – formát, materiály, základný didaktický prístup.

Súčasťou „Workshop Mathematics“ na Dickinson College je „Workshop Calculus“, „Workshop Statistics“ a „Workshop Quantitative Reasoning“.

Zámerom diplomovej práce je využiť pri vyučovaní matematiky workshopový formát a v jeho rámci konkrétnu techniku, a to skladanie papiera – origami. Tomuto zámeru vyhovuje model workshopu, ktorý umožňuje „predpísať“ žiakom plnenie určitých úloh či realizovanie konkrétnych experimentov, teda model typu „Workshop Mathematics“ s jeho „sprievodcom aktivitami“ vo forme pracovných listov.

Skladanie papiera je svojou podstatou praktická manuálna činnosť, ktorá zapája do práce viacero zmyslov, ktorá ponúka konkrétnu materiálnu realizáciu abstraktných matematických pojmov a operácií. Svojim „materiálnym“ charakterom, zameraním na základy daného odboru, reprezentovaním abstraktných myšlienkových konštrukcií konkrétnymi predmetmi a javmi reálneho sveta majú so skladaním papiera najviac spoločných prvkov experimenty využívané vo „*Workshop Calculus*“. Preto spôsob, akým sú žiakom poskytované informácie, štýl formulovania a spôsob zadávania úloh vo „*Workshop Calculus*“ poslúžil ako inšpirácia pri navrhovaní workshopov využívajúcich ako „experimentálne laboratórium“ skládanie papiera.

Z tohto dôvodu sa v ďalšom sústredíme na túto časť „*Workshop Mathematics*“.

Workshop Calculus na Dickinson College predstavuje vstupnú bránu k štúdiu matematickej analýzy. Jeho primárnym cieľom je priviesť študentov k solídneho pochopeniu základných matematických pojmov a ideí. Sekundárnym cieľom je vštepiť študentom vieru v ich schopnosť „robiť“ matematiku. Integruje v sebe potrebné prvky z algebry a trigonometrie, základné objekty úvodnej matematickej analýzy – funkcie, limity, derivácie, neurčitý a určitý integrál a základy diferenciálnych rovníc. Metóda, akou sa *Workshop Calculus* vyučuje, je netradičná. Klasické prednášky a cvičenia sú nahradené interaktívnym formátom vyučovania. Inovovaná vyučovacia hodina pozostáva z troch častí – sumarizujúcej besedy, úvodného komentára a kolaboratívnych aktivít (Hastings a Reynolds, 1999):

- *Sumarizujúca beseda*: Na začiatku každej vyučovacej hodiny sa asi 10 minút beseduje o tom, čo sa udialo na predchádzajúcej hodine, pripomenú, hodnotia a komentujú sa dôležité myšlienky, prezentuje sa doplňujúci teoretický materiál.
- *Úvodný komentár*: Sumarizujúca beseda plynule prejde k oznámeniu o tom, čo sa bude robiť ďalej. Zámerom úvodného komentára je orientovať myšlienky študentov vhodným smerom, avšak bez poskytnutia hocičoho naviac. Nové idey a pojmy sa uvádzajú intuitívnym spôsobom, bez poskytnutia akýchkoľvek formálnych definícií, dôkazov viet alebo podrobných príkladov.
- *Kolaboratívne aktivity*: Najväčšia časť vyučovacej hodiny je venovaná skupinovým aktivitám študentov, ich spolupráci pri riešení úloh a cvičení z knihy „*Workshop Calculus*“ (Hastings a Reynolds, 1999), ktorá slúži ako „sprievodca aktivitami“. Študenti zvyčajne pracujú v skupinách, každý pár pracuje s jedným počítačom. Stoly sú usporiadané tak, že susedné páry môžu ľahko spolupracovať a komunikovať. Trieda obsahuje voľnú centrálnu plochu pre spoločné

demonštrácie, stručné prednášky alebo celotriedne diskusie. Je to zároveň miesto, kde môže stáť učiteľ s dobrým výhľadom na všetky monitory. To mu umožňuje identifikovať študentov, ktorí majú problémy alebo nepracujú. Na jednom konci miestnosti je stôl s monitorom a tabuľou, kde môže inštruktor modelovať rôzne situácie, predvádzať riešenia problémov, robiť odvodenia, ukazovať simulácie alebo videá (Redish, 2003) (Obrázok 4).



Obr. 4 Príklad usporiadania workshopovej triedy (Redish, 2003).

Ako študenti pracujú, učiteľ chodí pomedzi nich, reaguje na požiadavky, kladie otázky, poprípade iniciuje diskusiu.

Dôležitým prvkom pre tento spôsob vyučovania je „sprievodca aktivitami“, v tomto prípade kniha „*Workshop Calculus*“, napríklad (Hastings a Reynolds, 1999). Kniha „*Workshop Calculus*“ predstavuje sústavu poznámok, informácií a návodov usmerňujúcich objaviteľskú činnosť študentov. Ide v podstate o súbor pracovných listov prezentovaných vo formáte pracovnej knihy.

Každý odsek knihy začína krátkym textom stručne informujúcim študentov, čo budú robiť. Nasleduje postupnosť úloh, na konci ktorej je súbor domácich cvičení. Jednotlivé úlohy sú navrhnuté tak, aby pomohli študentom prebádať nové pojmy alebo objaviť nové spôsoby ako riešiť problémy. Parciálne kroky v úlohách obsahujú dostatočné množstvo sprievodných informácií, umožňujúcich študentom samostatnú prácu. Kniha obsahuje prázdne miesta, kam študenti vpisujú výsledky svojich pozorovaní, kde robia výpočty, kam

zaznamenávajú svoje úvahy. V závere každej úlohy je text sumarizujúci hlavné myšlienky a závery z práve ukončenej úlohy a poskytujúci študentom stručný prehľad, čo budú robiť v úlohe nasledujúcej.

Veľký význam sa prikladá písaniu. Od študentov sa žiada aby vždy písomne zaznamenali interpretácie svojich pozorovaní a vysvetlili svoje zistenia. Študenti síce pracujú v 2-3 členných skupinách, no výsledky do svojich „sprievodcov aktivitami“ vpisuje individuálne každý sám.

Aj keď technológie (hardvér a softvér) sú veľkou pomocou a podstatnou zložkou pri aktivitách vo „*Workshop Calculus*“, od študentov sa vyžaduje i ručná práca. Výpočty, formálne úpravy vzťahov, náčrty grafov musia najprv urobiť ručne.

Na ilustráciu toho, ako sa pri vyučovaní matematiky využívajú reálne experimenty a pre získanie názornej predstavy o charaktere riešených úloh uvádzame stručný popis jednej úlohy z „*Workshop Calculus*“ (Hastings a Reynolds, 1999), a to úlohy zameranej na lineárne funkcie z tematického celku „Funkcie“.

V prvom kroku úlohy žiaci svojou rýchlejšou či pomalšou rovnomernou chôdzou smerom k alebo od detektora pohybu vytvoria súbory dát predstavujúce údaje o ich vzdialenosti od detektora pohybu v daných časových okamihoch.

V nasledujúcom kroku žiaci použijú tieto údaje na zostrojenie grafov vzdialenosť od detektora verzus čas. Pomocou zostrojených grafov odhadnú, v akej vzdialenosti od detektora boli vo vybraných konkrétnych časových okamihoch.

V ďalšom kroku žiaci nájdu sklon priamky a následne i rovnicu priamky, ktorá najlepšie fituje experimentálne trochu „hrboľaté“ grafy. Ďalej žiaci preveria rôzne spôsoby, ako možno reprezentovať funkciu (graf, tabuľka, rovnica).

Text pracovných listov žiakov oboznámi s pojmami definičný obor a obor funkčných hodnôt funkcie, načo sa žiaci naučia určiť, či konkrétne hodnoty príslušných veličín patria alebo nepatria do týchto oborov.

Po splnení spomenutých krokov danej úlohy žiaci pokročia ďalej, k nasledujúcej úlohe venovanej štúdiu po častiach lineárnych funkcií a ďalších zložitejších funkcií. Preklad časti príslušného „pracovného listu“ je v prílohe A.

2 Využitie origami vo vyučovaní matematiky

Prvopočiatky origami sa strácajú v šere raných dejín ďalekého Orientu. Za miesto jeho vzniku sa vyhlasujú ako Čína, tak i Japonsko. Bez ohľadu na krajinu pôvodu sa Japonsko považuje za krajinu, ktorá najviac prispela k rozvoju tohto starobylého druhu umenia.

Tradičné origami predstavuje umenie skladania realistických modelov živočíchov, rastlín alebo iných objektov z jedného kusu papiera, bez strihania, lepenia alebo dekorovania. Potrebný je len štvorec papiera a pár šikovních rúk. *„Hárok sa skladá pozdĺž jednotvárných geometrických línií. Odrazu sa premení na krehkú miniatúrnu poloabstraktnú plastiku, ktorá často uvádza v úžas svojou roztomilosťou“* (Gardner, 1987).

Ľudia intuitívne tušili, že origami je úzko prepojené s geometriou. Etapu intenzívneho pátrania po matematických stránkach origami však odštartoval až taliansko-japonský matematik **Humiaki Huzita** keď ukázal, že spôsob poskladania i toho najzložitejšieho origami možno zredukovať na postupnosť rôzne kombinovaných šiestich elementárnych operácií. **Koshiro Hatori** neskôr doplnil operáciu siedmu, čím, ako ukázal **Robert Lang**, vznikol úplný takzvaný Huzitov-Hatoriho systém axiém - elementárnych operácií (Lang, 2003). Ako bolo povedané, opakovaním iba týchto siedmich operácií v príslušnom počte a poradí možno zo štvorca papiera vytvoriť ľubovoľnú origami konštrukciu.

Oboznamovanie sa s matematickým obsahom origami postupuje dvoma smermi:

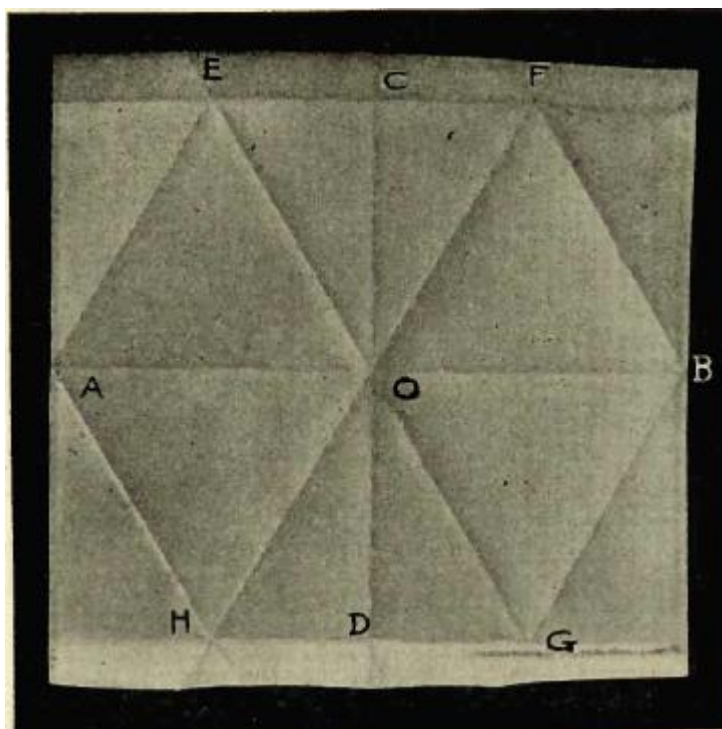
- (i) možné použitie skladania papiera na ilustrovanie matematických princípov alebo viet a
- (ii) objavovanie nových matematických a algoritmických stránok origami.

Prvý smer ponúka výstupy v pedagogickej praxi. Veľký objem prác v druhom smere priniesol praktické ovocie. Origami, alebo všeobecnejšie skladané štruktúry, našli aplikáciu v reálnom svete. Napríklad vo forme roztvárajúcich sa panelov slnečných batérií satelitov, zložených airbagov v automobiloch, expandujúcich arteriálnych stentov, a podobne.

Viac podrobností o systéme axiém, niektorých matematických vlastnostiach a praktických aplikáciách origami možno nájsť v bakalárskej práci (Kupková, 2010).

Prvá známa práca, v ktorej sa spája skladanie papiera s vyučovaním matematiky, vyšla pred viac ako storočím v Indii. Indický matematik T. Sundara Row v práci *„Geometric Exercises in Paper Folding“*, vydanej roku 1893 v Madrase, ukázal, že ak

priamy záhyb na papieri považujeme za model priamky a priesečník záhybov za model bodu, môžeme pomocou skladania papiera zostrojiť všetky konštrukcie Euklidovej geometrie v rovine, ktoré sa klasicky zostrojujú pomocou pravítka a kružidla (Obrázok 5). Bod po bode možno zostrojiť i krivky ako kužeľosečky a podobne.



Obr. 5 Pravidelný šesťuholník vytvorený skladaním papiera (Row, 1901).

Skladanie papiera je účinným spojením medzi reálnym svetom konkrétnych vecí a abstraktným svetom myšlienkových konštrukcií matematiky. Ponúka tak na možnosti bohatý štartovací bod a „hmatateľný“ prostriedok pre učenie sa matematiky. Napriek tomu sa vyučovanie pomocou skladania papiera (až na zopár výnimiek) využíva len veľmi skromne, väčšinou v matematických krúžkoch, mimoškolských aktivitách, letných školách a podobne. Ak sa aj skladanie papiera dostane do regulárnych vyučovacích hodín, tak len ako demonštrácia malého počtu geometrických princípov a myšlienok (Pope a Lam, 2009).

S narastajúcim volaním po účinnejších aktivizujúcich formách vyučovania sa začínajú množiť návrhy stratégií širšieho a účinnejšieho využitia pedagogického potenciálu skladania papiera pri vyučovaní matematiky.

Návrhy smerujú k využitiu skladania papiera na zavedenie štandardných pojmov školskej geometrie, ako sú priamka, rovnobežky, navzájom kolmé priamky, uhly. Nájdenie stredu úsečky, zostrojenie jej osi či zostrojenie osi uhla sú pri skladaní papiera priamočiare

operácie. Pomocou skladania papiera možno ľahko demonštrovať vlastnosti trojuholníkov, ich výšky, osi strán, osi uhlov, ťažnice, ťažisko, stredy opísanej a vpísanej kružnice, Pytagorovu vetu, vlastnosti mnohouholníkov a podobne. Skladanie papiera môže podporiť pochopenie základných geometrických princípov, ako sú symetria, podobnosť, zhodnosť. Pochopenie matematických pojmov ako delenie či pomer je pomocou skladania papiera taktiež ľahšie. Zložený papier môže slúžiť ako prostredie, v ktorom sú algebraické výrazy a rovnice zostavované a riešené.

Niektoré aktivity zamerané na vysvetľovanie matematiky pomocou skladania papiera nezahŕňajú vytvorenie nejakého papierového modelu, dôležité sú len záhyby (Row, 1901), (Coad, 2006), (Haga, 2008), (Žilková, 2009), (Pope a Lam, 2011). Iné vytvorenie konkrétneho modelu zahŕňajú, a to buď zloženie klasickej origami figúrky z jedného hárku papiera (Boakes, 2009), (Golan a Jackson, 2009), (Golan, 2011), alebo zostavenie modelu pomocou modulárneho origami (Brady, 2008), (Morrow a Morrow, 2011), (Georgeson, 2011). Pri modulárnom origami sa zo štvorca papiera poskladá jedna stavebná jednotka - modul. Z niekoľkých rovnakých modulov sa následne zostaví konečný model, zvyčajne mnohosten.

Nápaditosť a nekonvenčnosť niektorých predkladaných návrhov možno ilustrovať prácou (Georgeson, 2011) zameranou na osvojenie si pojmov objem, povrch, závislosť a funkcia, určenou študentom „middle school“, teda zhruba žiakom 2. stupňa základnej školy. Práca zaujme netradičnou metódou merania objemu.

Zo šiestich štvorcov papiera žiaci zložia šesť modulov a z nich zostavia kocku. Aby dostali kocky rôznej veľkosti, použijú sady rôzne veľkých hárkov papiera. Žiaci sa zaujímajú o závislosť objemu získanej kocky od dĺžky hrany štvorca papiera použitého na zloženie modulu.

Na prvotné zmeranie objemu kocky použijú žiaci netradičné objemové jednotky – fazuľky. Zaplnia fazuľkami vytvorenú kocku a potom ich spočítajú. Výsledky zaznamenajú (do tabuľky i graficky) pre ďalšiu analýzu.

Objem kocky vypočítajú i „klasicky“: kocku opatrne rozoberú, na záhybovom vzore modulu identifikujú štvorec tvoriaci stenu kocky a určia jeho plochu vo vzťahu k ploche celého hárku. Následne vypočítajú objem kocky. Porovnajú a rozdiskutujú výsledky získané „fazuľkovou“ metódou a „klasicky“.

Medzi vyššie spomenutými aktivitami sú dve, o ktorých je potrebné sa zmieniť podrobnejšie. Kvôli ich systematickosti, dobe trvania a počtu osôb ktorých sa týkali. Zhodou okolností, jedna z aktivít sa orientuje na pátranie po matematických vzťahoch

vlastných procesu skladania a ukrytých v záhybových vzoroch, bez snahy zložiť akýkoľvek origami model, kým druhá využíva na vyučovanie matematiky skladanie klasických origami figúrok.

2.1 Origamics

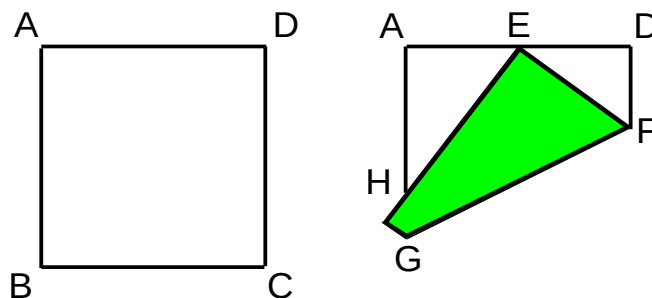
University of Tsukuba (Univerzita v Tsukube, Japonsko) ponúkala kurzy zamerané na matematické stránky skladania papiera a záhybových vzorov. Účastníkmi kurzov boli učitelia základných a stredných škôl a zámerom bolo upevniť, precvičiť a aplikovať znalosti získané na klasických hodinách matematiky. Súčasťou boli i populárne prednášky pre širokú verejnosť.

Tieto aktivity viedol profesor **Kazuo Haga** (pre zaujímavosť, povoláním biológ). Aby odlíšil odbor zameraný na pátranie po matematických zákonitostiach spojených so skladaním papiera a vynárajúcich sa pri analýze výsledkov tohto skladania od klasického origami, zaviedol preň pomenovanie „**Origamics**“. Prípona „ics“ má naznačovať, v analógii s názvami ako „mathematics, physics, ...“, že ide o vedeckú disciplínu (Haga, 2008).

Origamics sa od klasického origami líši vo viacerých aspektoch. Origami vytvára viac alebo menej verné trojrozmerné modely vtákov, zvierat, kvetov, lodí a podobne, kým produktom origamics je hárok papiera so záhybmi. Pracovný postup origami predstavuje zloženie papiera, ďalšie zloženie, ďalšie ..., pričom tento proces skladania obsahuje minimálny alebo žiadny počet roztvorení papiera po predchádzajúcom zložení. Naproti tomu origamics zvyčajne predstavuje zloženie papiera, vytvorenie zreteľného záhybu, roztvorenie papiera, zloženie papiera iným spôsobom, vytvorenie zreteľného záhybu, roztvorenie,

Charakter problémov študovaných v kurzoch origamics a spôsob práce možno ilustrovať na nasledujúcom príklade [Haga, 2008].

Štvorcový hárok papiera sa zloží tak, že pravý dolný roh sa priloží na stred hornej hrany a vytvorí sa záhyb.



Obr. 6 Prvá Hagova veta

Pátranie po matematickom obsahu takého zloženia papiera začína nájdením dĺžok strán pravouhlého trojuholníka $\triangle EDF$. K výsledku sa dá dôjsť použitím Pytagorovej vety a riešením príslušnej kvadratickej rovnice. Následne sa podobnými spôsobmi nájdú dĺžky významných úsečiek v danom zloženom objekte. Zistenia sa zhrnú do tvrdenia, napríklad [Haga, 2008]:

Prvá Hagova veta:

Jednoduchým zložením štvorcového hárku papiera, pri ktorom pravý dolný vrchol ľahne na stred hornej hrany, je každá hrana štvorca rozdelená vo fixovanom pomere, a to (pozri obrázok 6):

- a) Pravá hrana je rozdelená bodom F v pomere 3:5.
- b) Ľavá hrana je rozdelená bodom H v pomere 2:1.
- c) Ľavá hrana je rozdelená bodom G v pomere 7:1.
- d) Dolná hrana je rozdelená bodom H v pomere 1:5.

V skúmaní sa pokračuje tým, že za referenčný bod pre priloženie vrcholu sa nevyberie stred hornej hrany, ale iný jej bod. V analógii s predchádzajúcim prípadom sa pátra po matematických súvislostiach v takomto všeobecnejšom prípade.

Pri analýze záhybových vzorov sa využíva napríklad Pytagorova veta, kvadratické rovnice, rozsiahle poznatky o trojuholníkoch a podobne. Úlohy sú teda vhodné pre študentov stredných škôl a ľudí so stredoškolským alebo vysokoškolským vzdelaním..

2.2 Origametria

Pravdepodobne najorganizovanejšie, najviac inštitucionalizované a najrozšírenejšie vyučovanie pomocou origami je v Izraeli (Golan a Jackson, 2009) (Golan, 2011) . Už viac ako dvadsať rokov lektori vyškolení Izraelským origami centrom (Israeli Origami Center, IOC) vedú na školách rôzne programy využívajúce origami, ktoré sú zamerané na rozvinutie schopnosti žiakov učiť sa.

Spočiatku to bol program „Origami ako nástroj učenia sa“ a lektormi boli väčšinou ľudia s humanitným či umeleckým vzdelaním a zameraním. Hoci bol program úspešný, postupom času sa ukázalo, že skôr ako trvať na samostatnom predmete venovanom nástrojom učenia sa je z dlhodobého hľadiska prirodzenejšie a pre úspech projektu vhodnejšie začleniť origami do konkrétneho predmetu školských osnov, najprirodzenejšie do predmetu geometria.

IOC preto prešlo od programu „Origami ako nástroj učenia sa“ k programu „Origametria“. Tento termín vznikol v IOC spojením slov „origami“ a „geometry“ a označuje program zameraný na vyučovanie školskej geometrie pomocou origami. Zároveň sa ukázalo, že pre tento program sú vhodnejší lektori s matematickým vzdelaním ako predchádzajúci lektori s humanitným zameraním.

Izraelské ministerstvo vzdelávania (Israeli Ministry of Education) tento program formálne schválilo v roku 2008 pre základné školy a v roku 2010 pre materské školy. Týždenne tak niekoľko tisíc žiakov z desiatok základných škôl v Izraeli (treba však povedať, že nie zo všetkých a ani nie z väčšiny) študuje origametriu ako súčasť svojich učebných plánov.

V súčasnosti tento program funguje pre žiakov základných škôl, existujú však plány na jeho rozšírenie i na školy stredné.

Učitelia origametrie na každej škole úzko koordinujú svoju činnosť s učiteľmi tradičnej matematiky, takže nové témy sa učia súbežne na hodine origametrie i tradičnej geometrie. To umožňuje žiakom hlbšie pochopiť a ľahko si zapamätať základné pojmy a poznatky z geometrie.

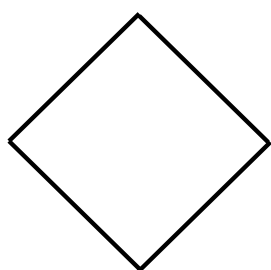
Po konzultácii s učiteľmi geometrie a v súlade so školskými osnovami sa vyberie téma, ktorá sa bude vyučovať. Učiteľ origametrie potom vyberie vhodný origami model. Nepoužívajú sa však modely geometrických telies, ale tradičné modely zvierat či akčné

hračky, ktoré môžu žiaci považovať za zábavné. Nie je dôležitý konkrétny model, geometria hotového modelu sa totiž zriedkakedy, ak vôbec niekedy, analyzuje. Dôležitý je spôsob, akým sa model skladá, analyzuje sa geometria poskladaného papiera na tom-ktorom stupni skladania.

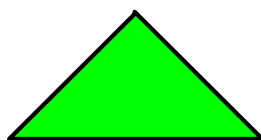
Počas skladania modelu triedou učiteľ zastaví proces po každom novom kroku, aby si žiaci overili, či môžu identifikovať nové príklady geometrického objektu (prvku) ktorý sa na danej hodine vyučuje, či sú tieto príklady rovnaké alebo odlišné od predchádzajúcich prípadov. Nepretržité hľadanie konkrétneho objektu počas procesu skladania a jeho opakované študovanie z rôznych strán a v meniacich sa situáciách uľahčuje a prehĺbuje pochopenie a osvojenie si geometrických pojmov a pripravuje študentov na prechod k vyšším úrovniam abstrakcie v geometrii.

Na konci každej hodiny si učiteľ overí, či každý žiak získal poznatky vyučované na danej hodine. Žiak si z každej hodiny okrem získaných poznatkov odnáša i poskladaný origami model, ktorý slúži ako motivačný nástroj (prvok) povzbudzujúci žiaka do ďalšieho štúdia.

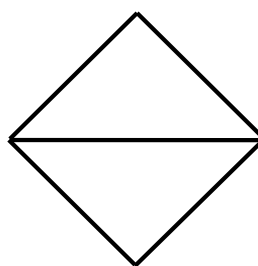
Spôsob práce s modelom origami na hodine origametrie možno ilustrovať príkladom z práce (Golan, 2011). Žiaci skladajú model (v tomto prípade tradičnú čínsku kačicu) a po niektorých krokoch odpovedajú na otázky kladené učiteľom.



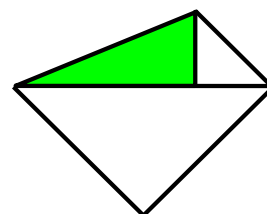
Krok1



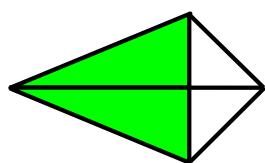
Krok 2



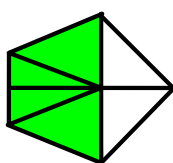
Krok 3



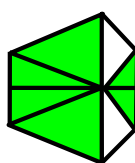
Krok 4



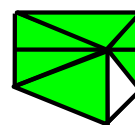
Krok 5



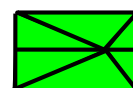
Krok 6



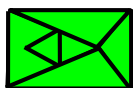
Krok 7



Krok 8



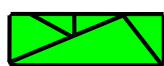
Krok 9



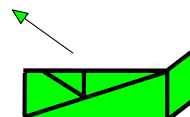
Krok 10



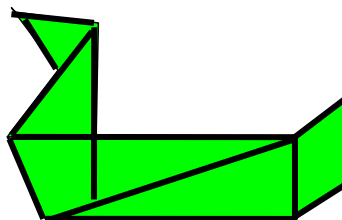
Krok 11



Krok 12



Krok 13



Krok 14

Napríklad po 4-tom kroku učiteľ položil otázky:

- 1) Aké mnohoúhelníky viete nájsť?
Aké trojuholníky viete identifikovať?
Aký typ uhlov viete nájsť?
- 2) Aké sú uhly v štvoruholníku vytvorenom po vykonaní tohto kroku procesu skladania?

A po 6-tom kroku sa pýtal:

- 1) Aké mnohoúhelníky viete nájsť?
Aké trojuholníky viete identifikovať?
Aké typy uhlov vidíte v päťuholníku?
- 2) Aký je celkový počet stupňov v päťuholníku?

Otázky pod číslom 1 sú pre mladších žiakov, tie pod číslom 2 pre starších.

2.3 Niekoľko poznámok na záver

Prirodzene, nie je možné očakávať, že skladanie papiera (origami) bude zaručeným prostriedkom ktorý zabezpečí, že sa matematika stane príťažlivejšou a zmysluplnejšou pre všetkých žiakov základných a stredných škôl. Deti síce rady a zo značným zaujatím skladajú papier a na svoje výtvary sú patrične hrdé, no nie všetci žiaci chcú pristupovať

k učeniu sa matematiky týmto spôsobom. Niektorí, aj keď majú možnosť nadviazať na úvodné origami aktivity a pokračovať ďalej touto cestou, to už neurobia (Brady, 2008).

Eisenberg a Nishioka (1997) prirovnali rôzne spôsoby a prostriedky matematického vzdelávania k rôznym hudobným nástrojom. Pokračujúc v tejto analógii argumentujú, že: *„Niektorý z hudobných nástrojov prijme za svoj len zopár študentov danej triedy či školy. Napriek tomu sa významné percento študentov môže ocitnúť v situácii, že si v procese svojho vzdelávania niektorý z hudobných nástrojov osvojili, a pre tých študentov, pre ktorých sa nástroj stáva vášňou, môže toto ich zaniebanie pre nástroj vytvoriť základ pre život plný intelektuálneho rastu a tvorivosti“* (Eisenberg a Nishioka, 1997).

3 Sprievodca aktivitami

Cieľom predkladanej práce bolo navrhnuť niekoľko úloh využívajúcich skladanie papiera (origami) pri vyučovaní matematiky vo workshopovom formáte.

Skladanie papiera predstavuje praktickú manuálnu činnosť prevádzanú s reálnym materiálnym objektom, ktorá umožňuje experimentovať, merať, porovnávať, objavovať, vizualizovať. Experimenty v „laboratóriu“ predstavovanom hárkom papiera sa svojou „materiálnosťou“ podobajú experimentom využívaným v projekte „Workshop Calculus“ na Dickinson College. Preto sa nám štýl, v akom je napísaný „Workshop Calculus“ javil ako vhodný i pre tvorbu našich „sprievodcov aktivitami“.

Po formálnej stránke sme sa teda inšpirovali prácou „Workshop Calculus with Graphing Calculators“ (Hastings a Reynolds, 1999). Po obsahovej stránke (obsah učiva, stupeň náročnosti, spôsob radenia jednotlivých problémov, a pod.) sme čerpali inšpiráciu hlavne z učebníc „Základy elementárnej geometrie“ (Šedivý a Vallo, 2009), „Discovering Geometry. An Investigative Approach“ (Serra, 2008), „Discovering Algebra. An Investigative Approach“ (Murdock a kol., 2007), „Discovering Advanced Algebra. An Investigative Approach“ (Murdock a kol., 2004), „Precalculus with Trigonometry. Concepts and Applications“ (Foerster, 2003) ako i z vlastných skúseností z povinnej pedagogickej praxe.

Úlohy, obsiahnuté v našich „sprievodcoch aktivitami“ predstavujú materiál vhodný hlavne pre expozičnú fázu vyučovacieho procesu, v menšej miere pre fázu motivačnú. Nevytvárali sme úplné a uzavreté vyučovacie jednotky, sústredili sme sa na úvodné časti, kde možno využiť skladanie origami modelu i ako istý motivačný prvok. Práca teda neobsahuje (až na jednu výnimku) príklady a úlohy na precvičovanie učiva a prehľbovanie poznatkov či pre prácu doma (domáce úlohy), keďže by sa v podstate jednalo o „klasické“ príklady pri ktorých sa väčšinou reálne neexperimentuje. To nebolo cieľom práce.

Naším zámerom bolo zahájiť každý tematický celok zložením vhodného modelu origami, ktorý by slúžil ako istý typ motivácie pre žiakov, jednak by jeho záhybový vzor alebo samotný model poskytol vhodný štartovací bod pre štúdium toho-ktorého súboru pojmov.

Po stanovení požiadaviek na model či jeho záhybový vzor sme hľadali vhodných kandidátov v dostupnej literatúre venovanej origami.

Pre úvod k Pytagorovej vete sme hľadali záhybový vzor, ktorý by pripomínal obrazce vytvárané obkladačkami v kúpeľoch, pohľad na ktoré, ako sa traduje, priviedol Pytagora k jeho vete. Vhodný záhybový vzor poskytol „Veterníček“ (Wurst a Wurst, 2003).

Pre štart k štúdiu uhlov zostrojených nad danou úsečkou sme hľadali záhybový vzor obsahujúci zväzky záhybov prechádzajúcich koncovými bodmi úsečky. Vhodným sa ukázal model jedného z lietadiel (známy z detstva). Jeho záhybový vzor však obsahoval iba jeden zväzok záhybov. Preto sme pridali ešte jednu vrstvu papiera tým, že sme pred štandardný postup skladania predradili ako prvý krok zloženie papiera napoly. V dôsledku toho sme získali požadovaný záhybový vzor s dvoma zväzkami záhybov.

Ako vhodný štartovací model k postupnostiam sa ukázal model ulity s jej postupne sa skracujúcimi obvodovými úsečkami (Maekawa, 2008).

Po štartovacích úlohách nasledujú série úloh, ktoré využívajú skladanie papiera na overenie, spresnenie, prehĺbenie a rozšírenie poznatkov „vynorivších sa“ v prvých úlohách, na pohľad na tieto pojmy z inej strany, či, opierajúc sa o známe pojmy, majú doviesť žiakov k ďalším novým pojmom z danej teoretickej oblasti.

Príklady uvádzané v práci sme vymýšľali samostatne. S väčšinou z nich alebo s im podobnými sme sa v priebežne študovanej i následne prezretej literatúre nestretli. K niektorým však existujú príklady podobné. K úlohe o obrátenej Pytagorovej vete, inšpirovanej staroegyptskými „napínačmi povrazov“, existuje podobný príklad v učebnici „Discovering Geometry“ (Serra, 2008). Z celej plejády existujúcich dôkazov Pytagorovej vety sme ako najvhodnejší pre realizáciu pomocou skladania papiera vybrali ten pochádzajúci od indického matematika Bhaskara. S počítaním vrstiev papiera pomocou v nich prerazených dier sme sa stretli v knihe „Math Wise!“ (Overholt a Kincheloe, 2010).

Kvôli úspore miesta nie je v sprievodcoch aktivitami ponechané dostatočné miesto na vpisovanie reakcií, názorov a odpovedí žiakov. Potrebné miesto si však záujemca môže podľa potreby ľahko vytvoriť.

Čo najviac informácií o tom, k čomu daná úloha smeruje, čo je jej zámerom, prečo ju majú žiaci plniť sme sa snažili sústrediť do textu pre študentov nachádzajúceho sa bezprostredne pred konkrétnou úlohou. Informácie o tom, čo očakávame, že žiaci riešením danej úlohy mali konkrétne dosiahnuť, aký je predpokladaný výsledok, ktorý mali získať a zamýšľaný poznatok, ktorý si mali žiaci osvojiť sú obsiahnuté v texte pre študentov umiestnenom bezprostredne za danou úlohou, sumarizujúcim činnosť žiakov pri riešení danej úlohy. Tieto texty predstavujú implicitné metodické informácie pre učiteľov.

Potrebné informácie, neobsiahnuté v týchto textoch a určené výhradne učiteľom, sú explicitne uvedené ako „Informácie pre učiteľa“ a v materiáloch dodaných študentom sa nevyskytujú.

Podľa súčasného vzdelávacieho plánu je téma 3.2 vhodná pre žiakov 7. ročníka ZŠ, téma 3.3 pre žiakov 8. ročníka ZŠ a téma 3.4 pre žiakov 3. a 4. ročníka stredných škôl.

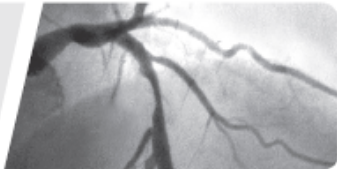
3.1 Ak vieme dobre poskladať papier, vieme dobre poskladať i mnohé iné veci, alebo prínos origami pre prax

Materiál publikovaný spoločnosťou Johnson a Johnson, s.r.o., priniesol článok

e-letter č. 1 • august 2006

 **špeciál / 1**

**Dnes sa srdce lieči angioplastikou
rovnako často ako bypassom**



ktorý informuje o alternatívnych spôsoboch liečby srdcových ochorení.

Srdcový sval potrebuje pre svoju prácu veľa energie. Energia sa uvoľňuje v srdcových bunkách iba ak majú dostatočný prívod kyslíka. Kyslík sa dostáva k týmto bunkám okysličenou krvou cez krvné riečisko.

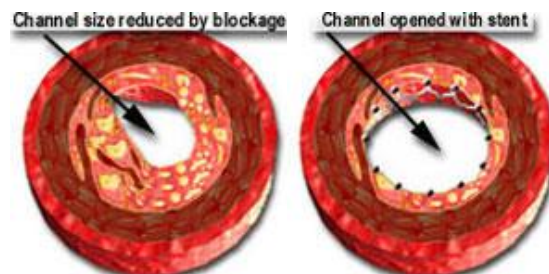
Ak je srdcový sval nedostatočne zásobovaný okysličenou krvou, jeho menšia alebo väčšia časť odumiera a vzniká infarkt srdcového svalu. Príčinou nedokrvenosti srdcového svalu je zníženie prietoku krvi príslušnou tepnou alebo jeho úplné zablokovanie usadzovaním tukových látok na stene tepny a väpenatenie steny tepny.

Potrebný je rýchly zásah. Možné sú rôzne spôsoby liečby.

Koronárny by-pass je operačný zákrok vyžadujúci otvorenie hrudníka. Upchaté miesto na tepne sa premostí (obkročí) novou cievou, najčastejšie kúskom žily odobratej zo stehna či lýtky. Tým sa pre krv vytvorí „obchádzka“, ktorá jej umožňuje obísť zablokovanú časť tepny a pokračovať ďalej na potrebné miesto.

Alternatívnou metódou liečby je koronárna angioplastika. Je to zákrok, pri ktorom sa pomocou malého vpichu, najčastejšie cez stehennú tepnu, zavedie do ciev tenká mäkká

trubička (katéter) s malým balónikom na konci. Balónik sa cievnym systémom dopraví na postihnuté miesto tepny. Lekár pomocou nafúknutia balónika natlačí usadeniny na stenu tepny a tým rozšíri jej vnútro. Balónik má väčšinou na svojom povrchu malú pletivovú rúrku vyrobenú z kovu alebo plastu (endoprotézu nazývanú stent), ktorá sa nafúknutím balónika rozťahne a pôsobí ako výstuž cievnej steny. Nakoniec sa balónik sfúkne a vytiahne. Roztiahnutý stent zostane v cieve natrvalo a bráni jej opätovnému zúženiu.



Obr. 7 Prierez cievy čiastočne zablokovanej usadeninami a spriechodnenej implantovaním stentu. Prameň: <<http://www.heartsite.com/html/stent.html>>

Úloha 1: Ak by ste museli takýto lekársky zákrok podstúpiť, ktorej z týchto metód by ste dali prednosť a prečo?

Úloha 2: Prenášať zložené, používať rozložené

Krok 1. Viete vymenovať niekoľko bežne používaných predmetov, ktoré prenášate alebo skladujete v priestorovo úspornej forme a v prípade potreby ich jednoduchým postupom pripravíte na použitie?

Krok 2. Viete si predstaviť valcovitú konštrukciu, ktorá pri tlaku zvnútra zväčší svoj priemer pri zachovaní výšky? Svoju predstavu opíšte, načrtnite, poprípade zhotovte model.

Krok 3. Hovorí vám niečo slovo „origami“? Čo si pri počutí tohto slova predstavíte?

* * *

Slovo „origami“ vzniklo spojením japonských slov „oru“, čo znamená ohýbať a „kami“, čo znamená papier. Doslovný význam slova origami je teda ohýbanie papiera. Dnes toto slovo slúži na pomenovanie starobylého umenia skladania realistických modelov rôznych objektov z jedného kusu papiera, bez strihania, lepenia alebo farbenia.

* * *

Úloha 3: Skákajúca žaba.

- a) Podľa inštruktážneho videa, napríklad zo stránky www.ukazmiako.sk/origami/ si poskladajte model skákajúcej žaby.
- b) Môže podľa vás toto umenie skladania papiera byť nejako spojené s matematikou?

* * *

Ľudia dlho intuitívne tušili úzku väzbu medzi origami a geometriou. Intenzívnejšia matematizácia skladania papiera však odštartovala až v druhej polovici minulého storočia, keď sa podarilo identifikovať úplný systém siedmich elementárnych operácií - siedmich navzájom rozdielnych spôsobov ako k už existujúcim hranám a záhybom jednoznačným a reprodukovateľným spôsobom pridať záhyb nový. Skladanie i toho najzložitejšieho origami modelu bolo teraz možné rozložiť na postupnosť týchto elementárnych operácií.

Zapojenie matematiky do popisu a štúdia origami umožnilo využiť počítače a cielene navrhnúť a poskladať oveľa prepracovanejšie, detailnejšie a sofistikovanejšie modely ako to umožňovalo klasické origami. No toto spojenie prinieslo i praktické benefity.

V tejto časti sa oboznámite s niektorými prípadmi, keď poznatky získané pri štúdiu skladania papiera (origami) pomohli vyriešiť problémy, ktoré sa vyskytli v technike a medicíne. Na konkrétnych príkladoch uvidíte, že matematika (v našom prípade matematika spojená s origami) prináša praktický úžitok v bežnom živote.

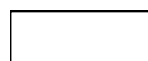
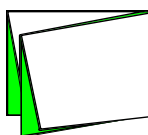
V prvej úlohe budete skladať a rozkladať hárky papiera. Použijete rôzne spôsoby, akými možno hárok poskladať. Potom budete rôzne poskladané hárky rozkladať, pričom sústredíte pozornosť na spôsob a obtiažnosť s akou možno zložené hárky rozložiť do pôvodného tvaru.

* * *

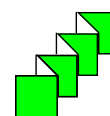
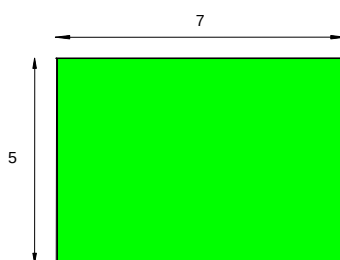
Úloha 4: Nie je poskladaný papier ako poskladaný papier.

Krok 1. Vezmite tri hárky papiera formátu A4. Dĺžky hrán hárku A4 sú takmer presne v pomere 7:5.

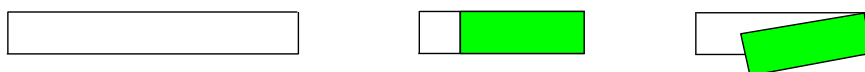
- a. Prvý hárok poskladajte spôsobom, akým bežne skladáte dopisy. Len ho prehnate viackrát. Postupne zložte hárok napoly horizontálne, napoly vertikálne, napoly horizontálne a napoly vertikálne.



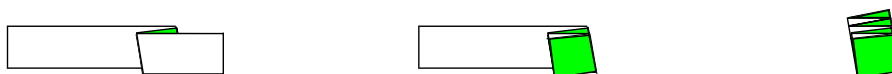
- b. Druhý hárok poskladajte ako turistickú mapu. Najprv zložte papier ako harmoniku so záhybmi rovnobežnými s dlhšou stranou hárku. Použite štyri záhyby, takže vznikne päťvrstvová „páska“ s pomerom dĺžky k šírke 7:1. Polohu prvého záhybu zistíte odmeraním, alebo ju čo najpresnejšie odhadnite. Ďalšie záhyby už urobíte ľahko. Získanú „pásku“ opäť zložte ako harmoniku. Použite šesť záhybov kolmých na dlhšiu hranu „pásky“. Vznikne 35-vrstvový stoh papiera.



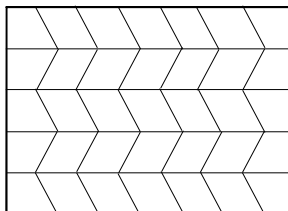
- c. Tretí hárok poskladajte trochu netradičným spôsobom. Začnite tak, ako v predchádzajúcom prípade. Hárok poskladajte rovnobežne s dlhšou hranou na spôsob harmoniky na päťvrstvovú „pásku“. Ďalej sa však už spôsob skladania bude líšiť od predchádzajúceho. Pásku prehnite tak, že pravý okraj priložíte na ľavý, posuniete ho späť na vzdialenosť rovnú šírke pásky a potom mierne nadol tak, že obe časti prehnutej pásky budú zvierat' uhol približne 10° a pritlačte.



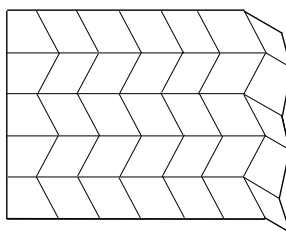
Kratší koniec opäť prehnite v jednej tretine od predchádzajúceho záhybu tak, že vznikne rovnobežník a pokračujte ďalej na spôsob harmoniky.



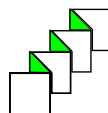
Hárok opatrne rozložte. Uvidíte nasledujúci záhybový vzor.



Papier znovu opatrne poskladajte, ale teraz obráťte (zmeňte) poradie skladania. Najprv skladajte harmoniku podľa vertikálnych záhybov, ktoré však už teraz nie sú priame ale predstavujú „cik-cak“ krivky, až potom podľa horizontálnych.



Výsledok opäť vyzerá ako harmonika, no teraz je vytvorená iným spôsobom ako predchádzajúca.



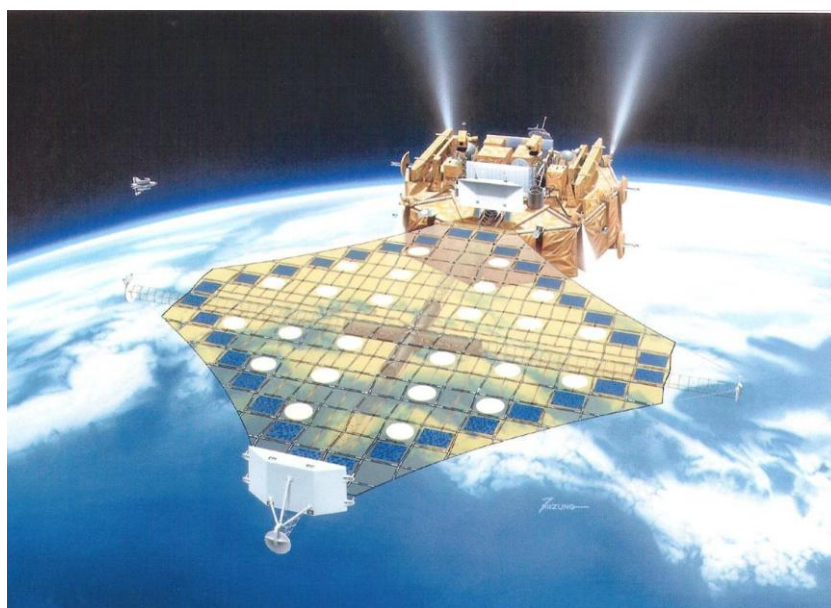
Krok 2: Vezmite poskladané hárky, ktoré ste zložili v kroku 1 a opatrne ich rozkladajte. Hľadajte rôzne spôsoby, ako možno jednotlivé typy poskladaných hárkov bezpečne rozložiť do pôvodného tvaru. Všímajte si a ohodnoťte priebeh, spôsob a zložitosť jednotlivých spôsobov rozloženia konkrétnych typov poskladaných hárkov. Svoje zistenia sformulujte písomne.

* * *

V predchádzajúcej úlohe ste skúmali proces rozkladania hárku papiera zloženého do malého plochého balíčka rôznymi spôsobmi skladania. Zistili ste, že rozloženie poskladaného dopisu predstavuje pomerne zložitý proces zahŕňajúci viacero krokov a prerušovaný pohyb jednotlivých častí hárku. Zloženú turistickú mapu možno rozložiť oveľa jednoduchšie, ťahaním za diagonálne umiestnené rohy hárku, ktoré sa nachádzajú na hornej a dolnej stene zloženého balíčka. Rozloženie predstavuje dvojstupňový proces, keď sa najprv hárak roztvorí v jednom smere a potom v druhom. Hárak zložený tretím spôsobom sa rozkladá najjednoduchšie. Pri ťahu za diagonálne umiestnené rohy hárku sa hárak roztvára synchronne, jedným plynulým pohybom.

Posledne spomínaný spôsob skladania rovinných membrán navrhol profesor Koryo Miura z Institute of Space and Astronautical Science, Univerzity v Tokiu. Po ňom bola táto metóda pomenovaná ako „Miura-ori“, teda Miurovo skladanie či Miurovo zloženie

(Pellegrino a Vincent, 2001). Keďže pri skladaní a rozkladaní „Miura-ori“ štruktúry nedochádza k ohýbaniu či skrúcaniu rovinných plôšok medzi záhybmi a zloženú štruktúru možno ľahko rozložiť plynulým jednosmerným ťahom za jeden vrchol, ukázal sa tento spôsob skladania zaujímavým pre japonský vesmírny program. Úlohou bolo poskladať panely slnečných batérií do malého balíčka, aby zaberali čo najmenej miesta počas dopravy satelitu na obežnú dráhu. Po dosiahnutí obežnej dráhy bolo potrebné tieto panely čo najjednoduchším spôsobom bezpečne rozložiť do pôvodného tvaru. Použitelnosť Miurovej metódy skladania panelov slnečných batérií bola úspešne otestovaná vo vesmíre roku 1995.



Obr. 8 Experiment so solárnymi panelmi na palube Space Flyer Unit (Miura 2009)

V nasledujúcej úlohe sa oboznámite s ďalšími príkladmi využitia poznatkov získaných pri štúdiu origami na riešenie rôznych problémov, ktoré pred inžinierov a dizajnérov stavia prax.

* * *

Úloha 5: Prínos skladania papiera pre riešenie praktických problémov v rôznych oblastiach ľudskej činnosti.

Krok 1. Pozrite si videozáznam prednášky venovanej rôznym aspektom origami. Počas jej sledovania (v prípade potreby opakovaného) identifikujte oblasti praktickej

ľudskej činnosti, v ktorých našlo origami uplatnenie. (Vhodná je napríklad prednáška R. Langa, ktorú možno nájsť na internete

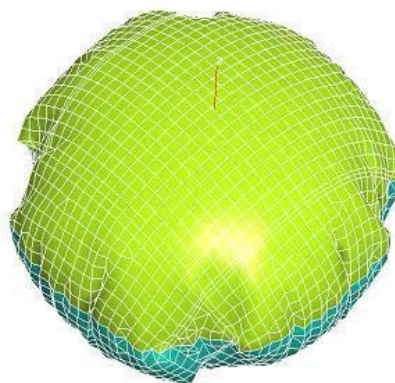
www.ted.com/talks/lang/sk/robert_lang_folds_way_new_origami.html

Krok 2. Svoje individuálne zistenia si navzájom porovnajte diskusiou v kolektíve.

* * *

Práca na predchádzajúcej úlohe vás priviedla k zisteniu, že teoretické znalosti, konkrétne postupy a zručnosti získané pri ohýbaní a skladaní papiera podľa pravidiel origami nachádzajú uplatnenie v situáciách, keď je potrebné rôzne objekty účelne poskladať do malého priestoru počas ich transportu na miesto určenia, po dosiahnutí ktorého musia byť automaticky a bezpečne znova rozložené. Cieľové oblasti, kam majú byť objekty dopravené, sú rôzne. Môže to byť obežná dráha Zeme, miesto zrážky automobilov, či artéria v ľudskom tele.

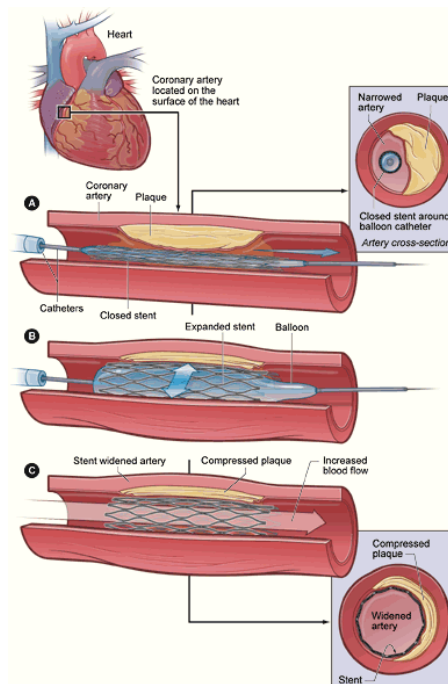
Podľa pravidiel origami sa napríklad skladajú airbagy do malých balíčkov za prístrojovú dosku automobilu, odkiaľ musia v prípade potreby rýchlo a spoľahlivo expandovať do požadovaného tvaru, ako i stometrová šošovka vesmírneho ďalekohľadu, ktorú musí nepoškodenú na obežnú dráhu vyniesť raketa s priemerom trupu zhruba štyri metre, či arteriálny stent, ktorý je potrebné dopraviť do zúženého miesta artérie, kde expanduje a takto rozťahne artériu, čím zlepši prietok krvi.



Obr. 9 Počítačová simulácia nafúknutého airbagu. Prameň:
<http://web.iitd.ac.in/~achawla/femesh.htm>>



Obr. 10 Prototyp EyeGlass s Robertom Langom v popredí Prameň:
<http://www.langorigami.com/science/eyeglass/eyeglass.php4>



Obr. 11 Umiestnenie stentu v upchatej artérii. Prameň:
http://www.nhlbi.nih.gov/health/dci/Diseases/Angioplasty/Angioplasty_howdone.html

V nasledujúcej úlohe sa s niektorými praktickými aplikáciami poznatkov o origami oboznámite podrobnejšie.

* * *

Úloha 6. Príprava prezentácií príkladov využitia origami v praxi (môže byť aj ako domáca úloha).

Krok 1: Každá skupina si vyberie jednu z praktických aplikácií origami, ktoré ste identifikovali v predchádzajúcej úlohe. O vybranej aplikácii pripravte krátku (asi 15 minútovú) prezentáciu. Pri príprave využite internet, prípadne knižné či časopisecké zdroje.

Vo svojej prezentácii:

- a) Stručne načrtnite, aký praktický problém bolo treba riešiť a prečo ho bolo treba riešiť.
- b) Uveďte, ako k riešeniu problému prispeli poznatky o origami, prípadne kto sa o riešenie problému zaslúžil.
- c) Prípadne sa krátko a jednoducho môžete zmieniť o tej časti „origami matematiky“, ktorá tvorila teoretický základ riešenia problému.

Krok 2: Výsledky svojho skúmania prezentujte pred kolektívom.

3.2 Pytagorova veta

Úloha, zadaná žiakom školy pre pisárov, zaznamenaná pred viac ako 3 500 rokmi klinovým písmom na babylonskej hlinenej tabuľke (Friberg, 2007):

*„Tyč. 30 jednotiek dlhá, pri stene zvislo postavená.
Hore, 6 jednotiek sklzála nadol,
dole, ako ďaleko sa odsunula?“*

Aby boli schopní problém vyriešiť, museli mať starobabylónski študenti už viac ako tisíc rokov pred Pytagorom poznatky, ktoré dnes súhrnne označujeme termínom „Pytagorova veta“.



Obr. 12 Táto starobabylónska tabuľka, nazývaná Plimpton 322, datovaná medzi rokmi 1900 a 1600 pred našim letopočtom, uvádza niekoľko vyšších pytagorejských trojíc, napr. 1679-2400-2929 (Serra, 2008).

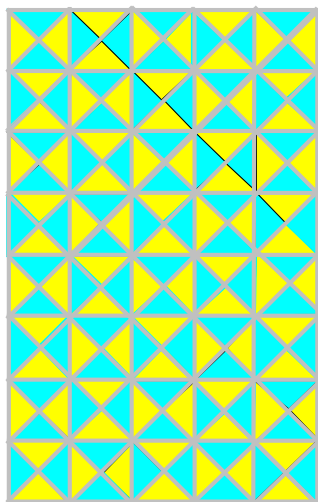
Z mnohých babylonských tabuliek, staroegyptských nálezov, indických a čínskych záznamov vyplýva, že ľudstvo pozná rôzne aspekty Pytagorovej vety už približne 4000 rokov. Zobrazenia v hieroglyfickom štýle napríklad naznačujú, že starovekí Egypťania používali mechanickú pomôcku, povraz s uzlami, pomocou ktorého „napínači povrazu“ vytyčovali pravý uhol pri vyznačovaní základov významných stavieb alebo pri znovu rozdeľovaní pozemkov po každoročných nílskych záplavách. Schopnosť použiť takúto pomôcku predpokladá znalosť aspoň základných faktov o vzťahu medzi pravouhlosťou trojuholníka a dĺžkami jeho strán.



Obr. 13 Staroegyptskí napínači povrazu (Serra, 2008)

Po celú dobu Pytagorova veta priťahovala odborníkov i amatérov, ktorí jej platnosť dokazovali rôznymi originálnymi spôsobmi. Výsledkom tohto snaženia je, že dnes existuje

viac ako 200 rôznych dôkazov Pytagorovej vety. Medzi nimi sú konštrukcie pochádzajúce od Pytagora, Euklida, autora Mony Lizy Leonarda da Vinciho, a napríklad i od 20. prezidenta USA, Jamesa A. Garfielda (v dobe publikovania bol ešte len kongresmanom) (Sparks, 2008).



Traduje sa, že Pytagoras prišiel na pravidlo, ktoré spája dĺžky strán pravouhlých trojuholníkov a ktoré dnes nazývame „Pytagorova veta“, pri pozorovaní rozloženia dlaždíc na dlážkach kúpeľov. Jeden z bežných vzorov vytváraných dlaždicami na stenách a dlážkach kúpeľov antického Grécka ilustruje obrázok.

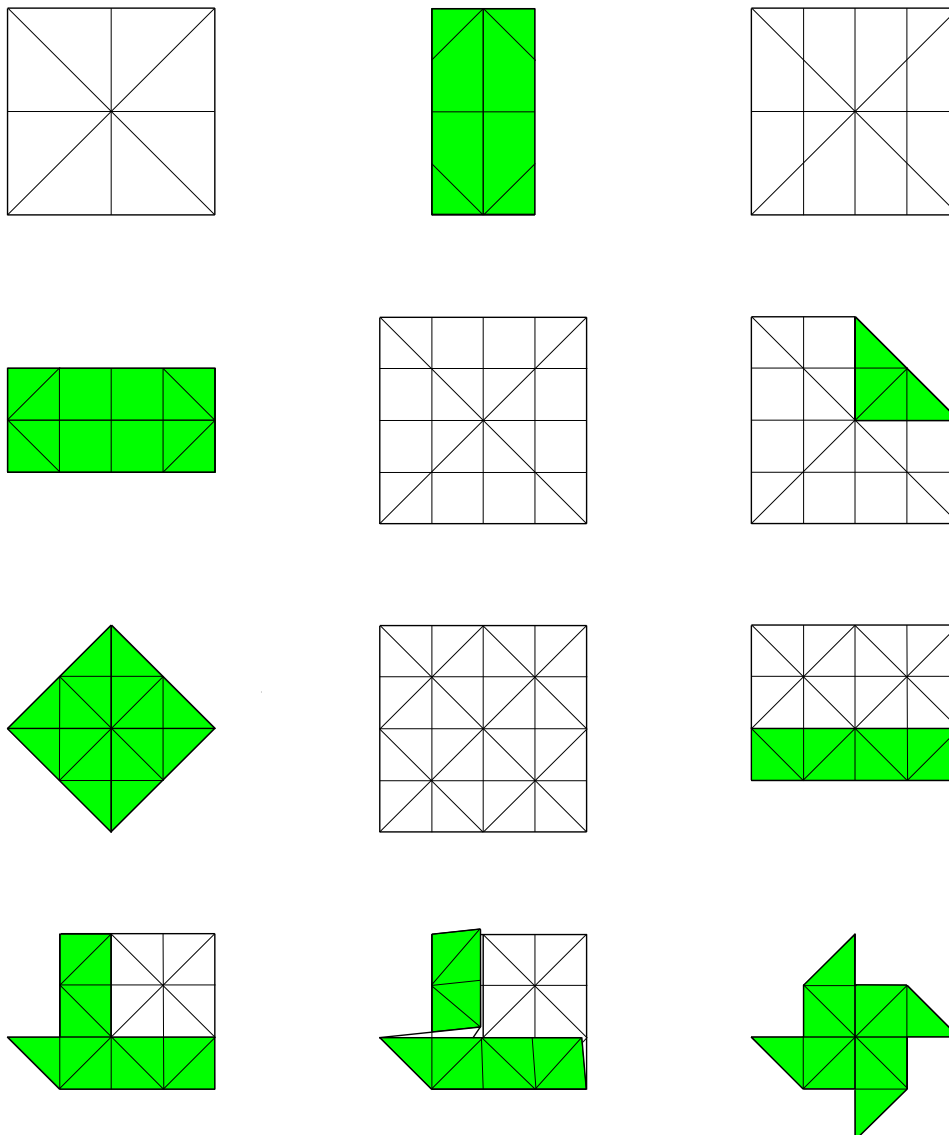
V nasledujúcich aktivitách sa oboznámite s Pytagorovou vetou trochu podrobnejšie. Namiesto dlaždicových vzorov budete skúmať záhybové vzory, ktoré vzniknú na hárku papiera poskladaním vhodného origami modelu. Na základe poznatkov zo svojho experimentovania so skladaním papiera zistíte, čo Pytagorova veta hovorí a potom dokážete jej platnosť. Overíte si, či platí i obrátená veta k vete Pytagorovej. Na záver sa pozriete na to, či možno Pytagorovu vetu zovšeobecniť, to znamená, či možno rozšíriť jej platnosť i na objekty iné než pre aké bola pôvodne vyslovená.

Svoje oboznamovanie sa s Pytagorovou vetou začnete tým, že z hárku papiera poskladáte veterník. Po jeho opatrnom rozložení dostanete záhybový vzor s množstvom geometrických útvarov. Sústredíte sa na (vyberiete si) jeden z pravouhlých trojuholníkov. Analýzou jeho okolia zistíte, aké geometrické útvary priliehajú k stranám vybraného trojuholníka a nájdete vzťah spájajúci tieto útvary.

* * *

Úloha 1. Papierový veterník a Pytagorova veta

Krok 1. Z hárku papiera podľa priloženého návodu poskladajte papierový veterník



Krok 2. Veterník opatrne opäť rozložte

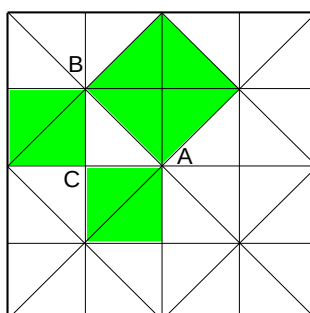
Krok 3. Pozrite si záhybový vzor, ktorý ste dostali po rozložení veterníka. Vidíte na ňom štvorce, ich uhlopriečky, trojuholníky. Čo môžete povedať o najmenších trojuholníkoch?

Krok 4. Vyberte jeden malý pravouhlý trojuholník. Ľahko zbadáte, že jeho strany majú nad sebou štvorce. Koľko malých pravouhlých trojuholníkov obsahujú jednotlivé štvorce?

Čo z toho plynie pre obsahy týchto štvorcov? Vyslovte hypotézu.

* * *

Pri plnení predchádzajúcej úlohy ste po rozložení veterníka získali nasledujúci záhybový vzor

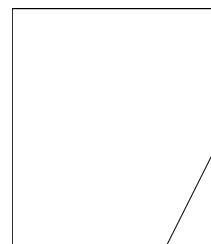
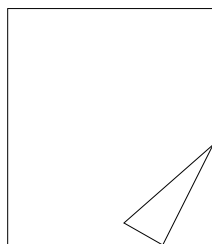


Zistili ste, že vďaka postupu vytvárania záhybov sú najmenšie (základné) trojuholníky pravouhlé, rovnoramenné a navzájom zhodné. Nech je vybraným trojuholníkom ABC. Pri pozornejšom pohľade ste zistili, že štvorce nad stranami AC a BC obsahujú po dva základné trojuholníky. Štvorec nad stranou AB obsahuje štyri takéto trojuholníky. Z toho vyplýva, že pre študovaný rovnoramenný pravouhlý trojuholník obsah štvorca nad stranou AB (prepona) sa rovná súčtu obsahu štvorcov nad stranami AC a BC (odvesny).

V nasledujúcej úlohe sa od rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov posuniete k ľubovoľným pravouhlým trojuholníkom. Pravouhlé trojuholníky zostrojíte ohýbaním hárku papiera. Odmeriate dĺžky strán týchto trojuholníkov a vypočítate ich druhé mocniny. Získané výsledky vám umožnia vysloviť domnienku o vzťahu medzi druhými mocninami dĺžok strán ľubovoľného pravouhlého trojuholníka,

* * *

Úloha 2. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka



Krok 1. Vytvorte záhyb zahnutím a opätovným vyrovnaním rohu hárku papiera. Záhyb a časti hrán papiera tvoria pravouhlý trojuholník, pričom záhyb je prepona a časť hrán papiera odvesnami.

Krok 2. Zmerajte dĺžku záhybu a dĺžky časti hrán papiera, tvoriace trojuholník a zaznamenajte ich do tabuľky. Merania zopakujte pre viacero trojuholníkov

Trojuholník	Dĺžka 1. odvesny	Dĺžka 2. odvesny	Dĺžka prepony (záhybu)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Krok 3. Vypočítajte druhé mocniny dĺžok odvesien a prepony pre jednotlivé trojuholníky zaznamenané v kroku 2 a výsledky zapíšte do tabuľky

Trojuholník	Štvorec dĺžky 1. odvesny	Štvorec dĺžky 2. Odvesny	Štvorec dĺžky prepony (záhybu)
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Krok 4. Použite získané výsledky na potvrdenie alebo vyvrátenie predpokladaného vzťahu medzi dĺžkami odvesien a dĺžkou prepony.

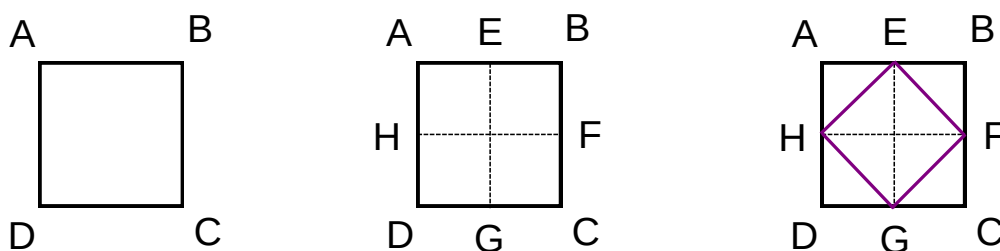
* * *

V predchádzajúcej úlohe ste zistili, že pravdepodobne pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník je súčet druhých mocnín dĺžok odvesien rovný druhej mocnine dĺžky prepony. V nasledujúcej úlohe tento predpoklad dokážete. Budete skladať hárky papiera. Vytvoríte tak rôzne záhybové vzory. Zistíte, aké rovinné útvary ste záhybmi na hárku papiera vytvorili. Na základe tejto analýzy budete schopní pomocou obsahov útvarov na záhybovom vzore dokázať Pytagorovu vetu.

* * *

Úloha 3. Dôkaz Pytagorovej vety pomocou záhybových vzorov.

Krok 1. Na štvorci papiera vytvorte záhybový vzor nasledujúcim spôsobom.



Vezmite štvorec papiera $ABCD$.

Ohnutím papiera napoly vytvorte záhyby štvorca kolmé na jeho strany. Priesečníky záhybov a strán označte ako E, F, G, H .

Vytvorte záhyby EF, FG, GH, HE .

Krok 2. Analyzujte vytvorený záhybový vzor. Berte pritom do úvahy, akým spôsobom bol vzor vytvorený.

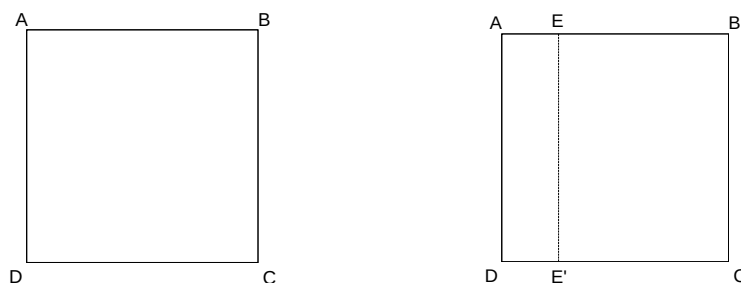
- Aké geometrické útvary vytvárajú záhyby na hárku papiera?
- Čo môžete povedať o trojuholníkoch $\triangle EFB, \triangle FGC, \triangle GHD, \triangle HEA$? Zdôvodnite.

- c) Aký útvar predstavuje štvoruholník $EFGH$ a prečo?
- d) Môžete nájsť nejaký vzťah medzi obsahom štvorca $ABCD$ a obsahom útvarov na ňom vytvorených?

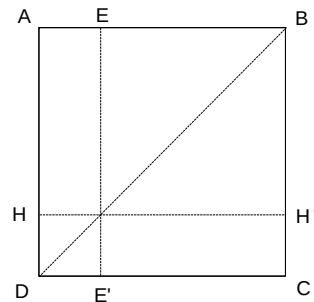
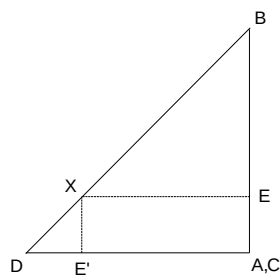
Krok 3. Nech sa dĺžka úsečky EF rovná c . Dĺžka EB nech je a .

- a) Vyjadrite obsahy jednotlivých útvarov pomocou a a c .
- b) Napíšte vzťah medzi obsahom štvorca $ABCD$ a obsahmi v ňom vytvorených útvarov pomocou a a c . Rovnicu upravte na čo najjednoduchší tvar. Aký je výsledok?

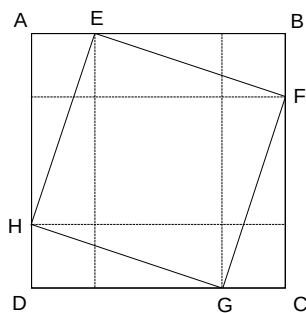
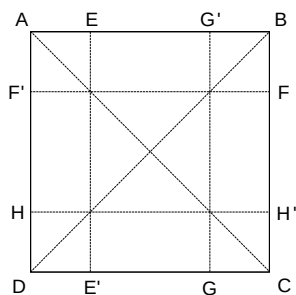
Krok 4. Vytvorte nový záhybový vzor nasledujúcim spôsobom



Vezmite štvorec papiera $ABCD$. Ohnutím vytvorte záhyb EE' kolmý na strany AB a CD , ktorý teraz nie je osou štvorca.



Hárok ohnite okolo uhlopriečky BD a takto prehnutý ho ohnite ešte okolo záhybu EX a $E'X$. Po otvorení hárku sa ukáže záhyb HH' .



Hárok ohnite okolo uhlopriečky AC a príslušných častí záhybov EE' , HH' . Po otvorení hárku sa ukážu záhyby FF' , GG' . Vytvorte záhyby EF , FG , GH , HE .

Krok 5. Analyzujte vytvorený záhybový vzor. Berte pritom do úvahy, akým spôsobom bol vzor vytvorený.

- Aké geometrické útvary vytvárajú záhyby na hárku papiera?
- Čo môžete povedať o trojuholníkoch $\triangle EFB$, $\triangle FGC$, $\triangle GHD$, $\triangle HEA$ a prečo?
- Aký útvar predstavuje štvoruholník $EFGH$ a prečo?

- d) Môžete nájsť nejaký vzťah medzi obsahom štvorca $ABCD$ a obsahom útvarov na ňom vytvorených?

Krok 6. Nech sa dĺžka úsečky EF rovná c . Dĺžka EB nech je a a EF b .

- a) Vyjadrite obsahy jednotlivých útvarov pomocou a , b a c .
- b) Napíšte vzťah medzi obsahom štvorca $ABCD$ a obsahmi v ňom vytvorených útvarov pomocou a , b a c . Výraz upravte na čo najjednoduchší tvar. Aký je výsledok?

* * *

V predchádzajúcej úlohe ste dokázali, postupujúc od jednoduchšieho prípadu rovnoramenného trojuholníka k zložitejšiemu prípadu všeobecného trojuholníka, že ak je trojuholník s dĺžkami strán a, b, c pravouhlý a c je jeho prepona, potom platí rovnica (Pytagorova veta) $a^2 + b^2 = c^2$.

Ak Pytagorovu rovnicu $i^2 + j^2 = k^2$ spĺňajú prirodzené čísla (i, j, k) nazývajú sa pytagorejská trojica.

Uvádzame niekoľko príkladov pytagorejských trojíc: 3-4-5, 6-8-10, 9-12-15, ...

5-12-13, 10-24-26, 15-36-39,...

7-24-25, 14-48-50,...

8-15-17, 16-30-34,...

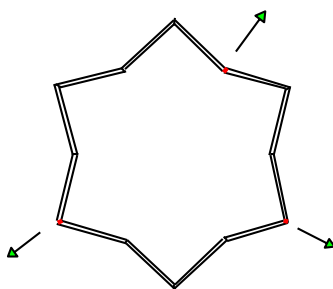
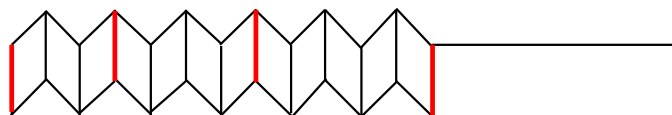
V nasledujúcej úlohe zostrojíte z papierovej pásky trojuholník s dĺžkami strán rovnými pytagorejskej trojici čísel. Odmeriate hodnotu najväčšieho uhla v trojuholníku. Na základe výsledkov budete schopní vysloviť domnienku (predpoklad), či trojuholník s dĺžkami strán spĺňajúcimi podmienku $a^2 + b^2 = c^2$ je alebo nie je pravouhlý, teda či platí aj obrátená Pytagorova veta.

* * *

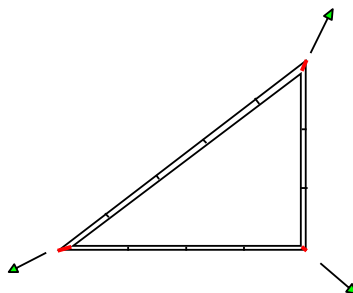
Úloha 4. Platí obrátená Pytagorova veta?

Krok 1. Vyberte si jednu z pytagorejských trojíc (i, j, k) . Na dlhej papierovej páske vyznačte ohýbaním na spôsob „harmoniky“ $i + j + k$ rovnakých úsekov. Zreteľne označte záhyby oddeľujúce úseky dĺžky i, j a k . Jednotkový úsek vyberte dostatočne dlhý, aby boli nasledujúce merania čo najpresnejšie

Krok 2. Pásku stočte do kruhu tak, že začiatok prvého úseku ľahne na koniec posledného a pásku zlepte (zospinkujte, zošite, ...)



Krok 3. Pásku vo vyznačených bodoch ťahajte tak, že úseky medzi týmito bodmi sa napnú a vyrovnajú. Vznikne trojuholník.



Krok 4. Zmerajte najväčší uhol a výsledok zapíšte do tabuľky

Trojuholník i-j-k	Veľkosť najväčšieho uhla (oproti najdlhšej strane)

Krok 5. Vyberte si ďalšiu pytagorejskú trojicu čísel a kroky 1 až 4 opakujeme s novými dĺžkami (l,m,n).

Krok 6. Porovnajte výsledky získané pre rôzne pytagorejské trojice a na základe získaných výsledkov vyslovte hypotézu o platnosti alebo neplatnosti obrátenej Pytagorovej vety.

* * *

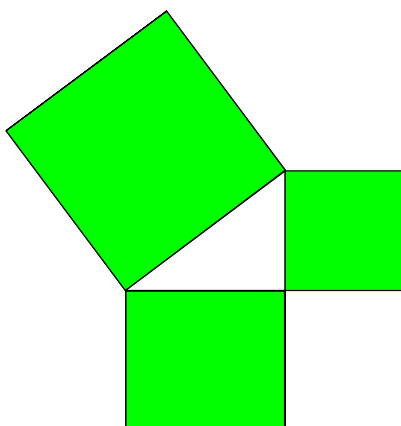
Priamym meraním ste si overili, že pravdepodobne platí aj obrátená Pytagorova veta, teda, že trojuholník, ktorého dĺžky strán spĺňajú rovnicu $a^2 + b^2 = c^2$ je pravouhlý. Dôkaz tentoraz necháme na neskôr.

V nasledujúcej úlohe nahradíte štvorce nad stranami pravouhlého trojuholníka inými rovinnými útvarmi. Určíte obsahy týchto útvarov a ich vzájomné vzťahy. Na základe získaných údajov budete schopní vysloviť tvrdenie o platnosti či neplatnosti ekvivalencie medzi obsahom útvaru zostrojeného nad preponou a súčtom obsahov útvarov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka i pre iné útvary ako štvorce.

* * *

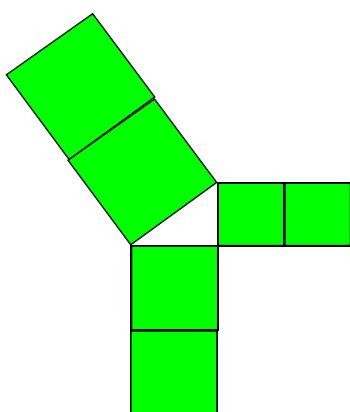
Úloha 5. Ak nahradíme štvorce nad stranami pravouhlého trojuholníka inými útvarmi, bude platiť Pytagorova veta i pre ne?

Krok 1. Vezmite tri štvorce papiera, dĺžky hrán ktorých predstavujú niektorú z pytagorejských trojíc čísel. Štvorce priložte vrcholmi k sebe tak, že ohraničujú pravouhlý trojuholník.



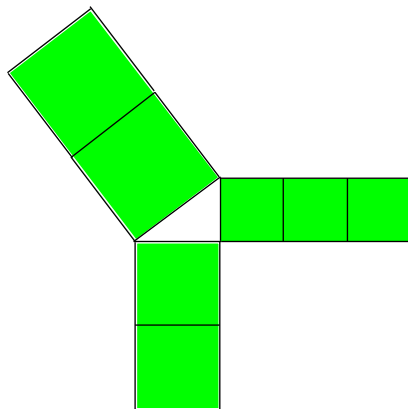
Krok 2. Vezmite ďalšie tri štvorce papiera, zhodné s tými prvými a priložte ich k voľným hranám štvorcov ohraničujúcich trojuholník.

- Čo môžeme povedať o obdĺžnikoch, ktoré takto vznikli a o ich obsahoch?
- Aký je pomer dĺžok strán v jednotlivých obdĺžnikoch? Čo z toho vyplýva?

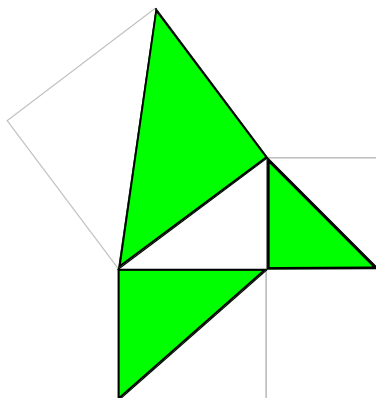


Krok 3. Teraz vezmite len jeden štvorec a predĺžte ním obdĺžnik nad príslušnou odvesnou trojuholníka.

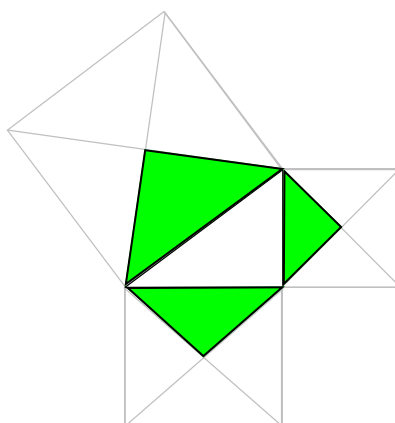
- Čo môžete povedať o obdĺžnikoch, ktoré takto vznikli a o ich obsahoch?
- Aký je pomer dĺžok strán v jednotlivých obdĺžnikoch? Čo z toho vyplýva?



Krok 4. Pôvodné štvorce ohniete okolo uhlopriečky tak, že jeden z voľných vrcholov ľahne na vrchol trojuholníka. Čo môžete povedať o takto vzniknutých trojuholníkoch a o ich obsahoch?



Krok 5. Vytvorené trojuholníky ohniete ešte raz tak, že i posledný voľný vrchol ľahne na vrchol pravouhlého trojuholníka. Čo môžete povedať o výsledných trojuholníkoch a ich obsahoch?



Krok 6. Predchádzajúce výsledky zhrňte do tvrdenia, či analógia Pytagorovej vety platí/neplatí pre plochy útvarov zostrojených nad preponou a odvesnami pravouhlého trojuholníka, ktoré sú iné ako štvorce.

* * *

Posledná úloha vás priviedla k zisteniu, že aj pre iné útvary (nielen štvorce) zostrojené nad stranami pravouhlého trojuholníka je súčet obsahov útvarov nad odvesnami rovný obsahu útvaru nad preponou. No útvary zostrojené nad preponou a odvesnami musia byť pravdepodobne podobné. Tento predpoklad si overíte plnením prvej z domácich úloh.

* * *

Ukážka možných domácich úloh

Domáca úloha 1. Pytagorova veta nielen pre štvorce

Pôvodná Pytagorova veta hovorí, že súčet plôch štvorcov zostrojených nad odvesnami pravouhlého trojuholníka je rovný ploche štvorca zostrojeného nad preponou.

V poslednej školskej úlohe ste zistili, že rovnaké tvrdenie platí i pre plochy rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov zostrojených nad odvesnami a preponou iného pravouhlého trojuholníka.

Preverte či rovnaký vzťah platí i pre iné rovinné útvary. Zostrojte (narysujte) rôzne, navzájom podobné tvary nad stranami pravouhlého trojuholníka. Starostlivo zmerajte alebo vypočítajte ich plochy a porovnajte ich navzájom.

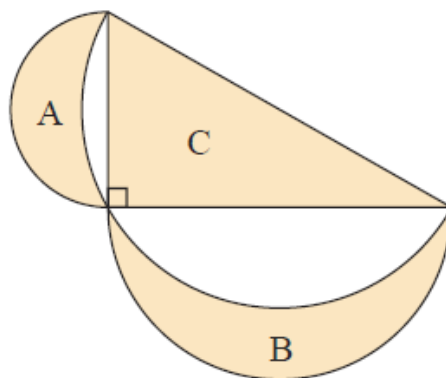
Pripravte prezentáciu vašich výsledkov. Prezentácia by mala obsahovať náčrtky pravouhlých trojuholníkov s vami študovanými útvarmi zostrojenými nad ich stranami, výsledky výpočtov alebo meraní ich plôch, stručné vysvetlenie ako ste plochy zisťovali a zhodnotenie či obdoba Pytagorovej vety pre tieto útvary platí.

(Pomôcka: Začnite s pravidelnými mnohoúhelníkmi zostrojenými nad stranami pravouhlého trojuholníka.)

Domáca úloha 2. Získané poznatky si overte dôkazom nasledujúceho tvrdenia:

Nad odvesnami pravouhlého trojuholníka zostrojíme polkružnice ležiace mimo trojuholníka. Nad preponou pravouhlého trojuholníka zostrojíme polkružnicu tak, že trojuholník leží v polkruhu ňou ohraničenom.

Dokážte, že plocha obrazcov ohraničených polkružnicami je rovná ploche pravouhlého trojuholníka. Teda, že platí $\text{plocha A} + \text{plocha B} = \text{plocha C}$.



Domáca úloha 3. Vyriešte nasledujúci problém



Výrobcovia televízorov postupne prechádzajú od tradičných obrazoviek formátu 4:3 (pomer šírky obrazovky k jej výške) k obrazovkám širokohlého formátu 16:9. Veľkosť obrazovky sa v oboch formátoch zvyčajne udáva pomocou dĺžky jej uhlopriečky. Ak ste zvyknutí na sledovanie televízora s uhlopriečkou 55 cm vo formáte 4:3, akú minimálnu uhlopriečku musí mať obrazovka formátu 16:9, aby sa neznížil Váš komfort sledovania televízneho programu, t.j. aby sa neznížila výška obrazu?

3.3 Množina vrcholov daných uhlov zostrojených nad danou úsečkou

Množina všetkých bodov roviny, z ktorých danú úsečku vidieť pod daným uhlom.

Pri riešení konštrukčných úloh často potrebujeme nájsť bod, ktorý súčasne spĺňa dve podmienky. Bod zvyčajne nájdeme ako bod prieniku dvoch geometrických miest bodov.

Geometrickým miestom bodov sa nazýva geometrický útvar, ktorý pozostáva zo všetkých bodov roviny, ktoré majú danú vlastnosť. Mnohé geometrické miesta bodov už poznáte. Napríklad, kružnicu možno definovať ako geometrické miesto bodov, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od daného bodu, os úsečky ako geometrické miesto bodov rovnako vzdialených od koncových bodov úsečky a podobne.

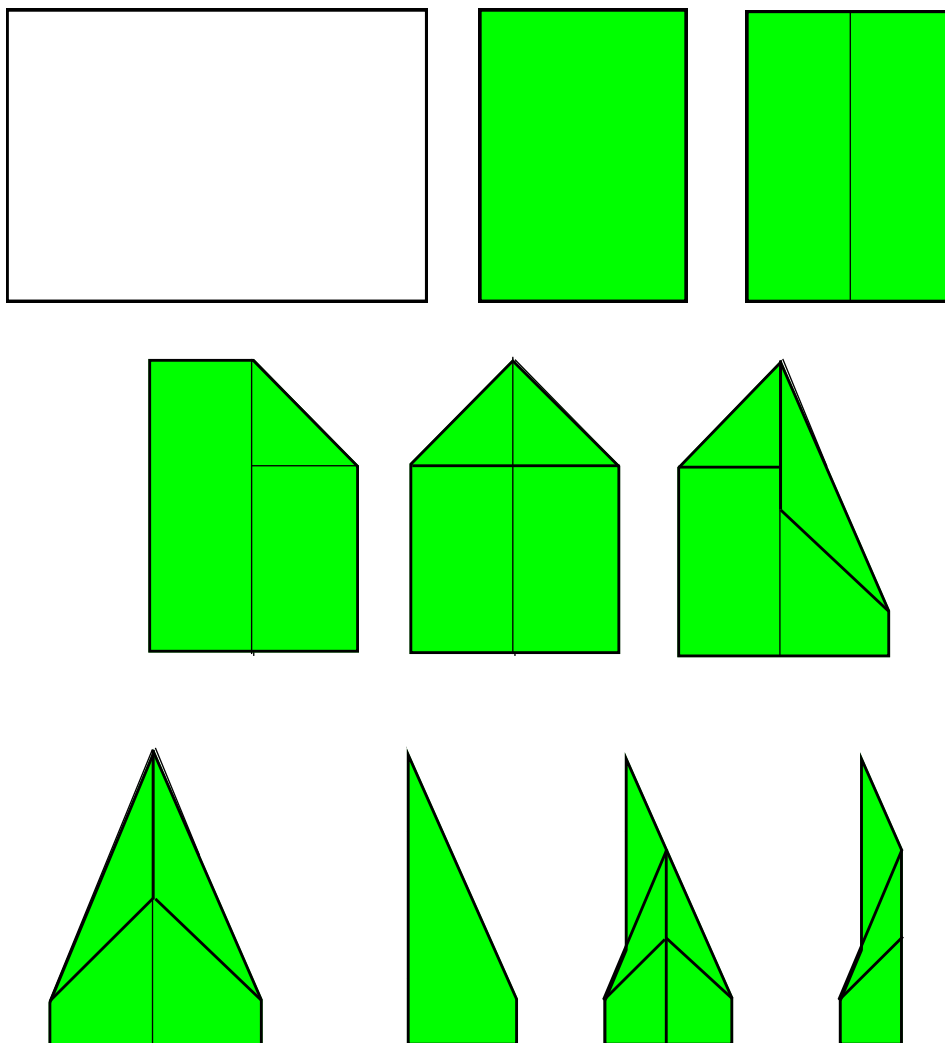
Cieľom vašej nasledujúcej činnosti je oboznámiť sa s geometrickým miestom vrcholov uhlov s danou veľkosťou, ramená ktorých prechádzajú dvoma danými bodmi, inými slovami identifikovať a preskúmať množinu všetkých bodov roviny, z ktorých vidieť danú úsečku pod daným uhlom.

Pracovať na prvej úlohe začnete tým, že sa naučíte poskladať z hárku papiera lietadlo. Keď ho potom opatrne rozložíte, získate záhybový vzor, ktorý okrem iného obsahuje dva zväzky záhybov prechádzajúcich dvoma rôznymi bodmi. Roztriedite priesečníky týchto záhybov podľa toho, či predstavujú vrchol uhla väčšieho ako pravý uhol, menšieho ako pravý uhol alebo rovného pravému uhlu. Zmeriate vzdialenosti medzi priesečníkmi a stredom úsečky určenej dvoma spomínanými bodmi.

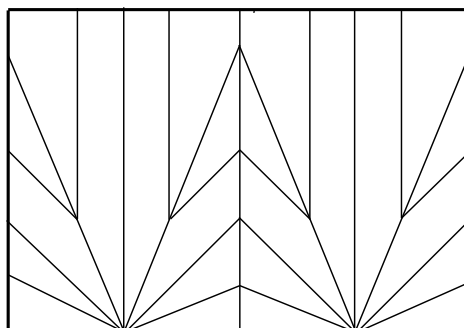
* * *

Úloha 1. Rozloženie vrcholov rôznych uhlov zostrojených nad danou úsečkou v polrovine.

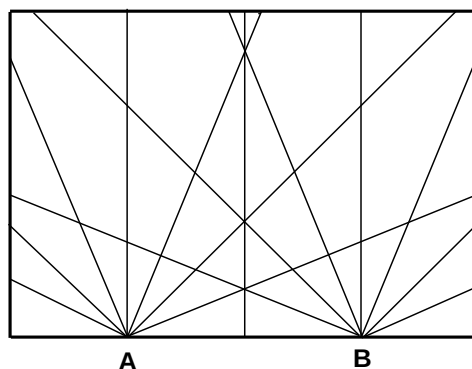
Krok 1. Z hárku papiera formátu A4 poskladajte podľa návodu lietadlo.



Krok 2. Hotový model opatrne rozložte. Získate nasledujúci záhybový vzor.

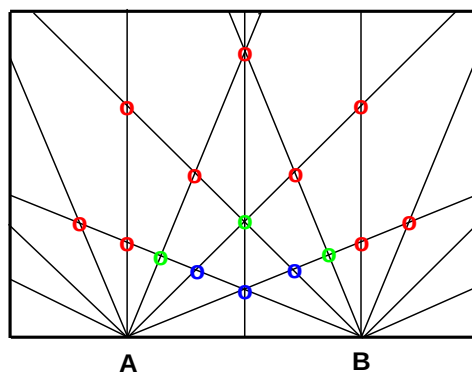


Krok 3. Zložením papiera zvýraznite záhyby vychádzajúce z bodov reprezentujúcich špičku lietadla (body A,B) a zároveň tieto záhyby predĺžte na celý hárok (prípadne ich zvýraznite tenkou čiarou pomocou ceruzky). Dostanete nasledujúci záhybový vzor.



Krok 4. Porovnajte uhly, ktoré zvierajú záhyby vychádzajúce z bodu A so záhybmi vychádzajúcimi z bodu B, s pravým uhlom (napríklad pomocou pravého uhla na pomocnom hárku papiera). Priesečníky, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom rozoznateľne menším ako je pravý uhol, označte červeným krúžkom. Priesečníky, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom rozoznateľne väčším ako je pravý uhol, označte modrým krúžkom. Priesečníky, pri ktorých nie je zreteľne jasné, či uhol zvieraný záhybmi je väčší či menší ako pravý, teda sa vám zdá, že môže byť pravý, označte zeleným krúžkom. Podľa reálnych výsledkov na svojom záhybovom vzore označte príslušnými farbami i priesečníky na vyššie uvedenom náčrte záhybového vzoru.

Informácia pre učiteľa: Po vykonaní kroku 4) by žiaci mali získať nasledujúci výsledok.



Krok 5. Odmerajte vzdialenosť od stredu S úsečky AB po bod A na svojom záhybovom vzore

$$|SA| = \dots\dots\dots \text{mm}$$

Krok 6. Odmerajte vzdialenosť červeno zakrúžkovaných priesečníkov (vrcholov uhlov menších ako pravý uhol) od stredu úsečky AB. Výsledky zapíšte do tabuľky.

Vrchol uhla $< 90^\circ$ číslo	1									
Vzdialenosť vrcholu od stredu úsečky AB [mm]										

Vzdialenosti študovaných bodov, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom menším ako pravým, od stredu tejto úsečky sú ako vzdialenosť krajného bodu úsečky AB od jej stredu

Krok 7. Odmerajte vzdialenosť modro zakrúžkovaných priesečníkov (vrcholov uhlov väčších ako pravý uhol) od stredu úsečky AB. Výsledky zapíšte do tabuľky.

Vrchol uhla $> 90^\circ$ číslo	1									
Vzdialenosť vrcholu od stredu úsečky AB [mm]										

Vzdialenosti študovaných bodov, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom väčším ako pravým, od stredu tejto úsečky sú ako vzdialenosť krajného bodu úsečky AB od jej stredu

Krok 8. Odmerajte vzdialenosť zeleno zakrúžkovaných priesečníkov (možných vrcholov pravých uhlov) od stredu úsečky AB. Výsledky zapíšte do tabuľky.

Vrchol uhla $\approx 90^\circ$ číslo	1									
Vzdialenosť vrcholu od stredu úsečky AB [mm]										

Čo naznačujú výsledky prezentované v poslednej tabuľke?

Porovnajte vzdialenosti vrcholov “pravých” uhlov od stredu úsečky AB so vzdialenosťou koncového bodu úsečky od stredu, to jest s $|SA|$. Aké je vaše zistenie?

Krok 9. Na základe svojich pozorovaní a meraní vyslovte (napíšte) predpoklad o polohe vrcholov pravých uhlov zostrojených nad danou úsečkou, o polohe vrcholov uhlov väčších ako pravý uhol, o polohe vrcholov uhlov menších ako pravý uhol.

* * *

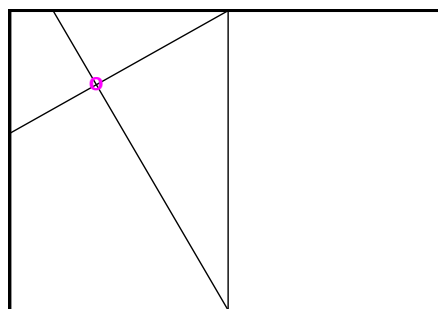
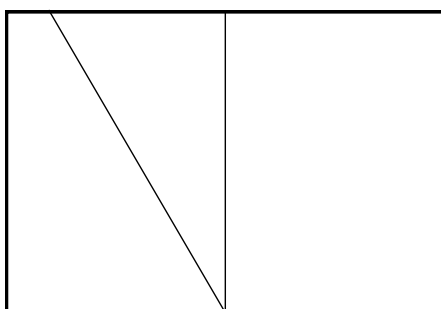
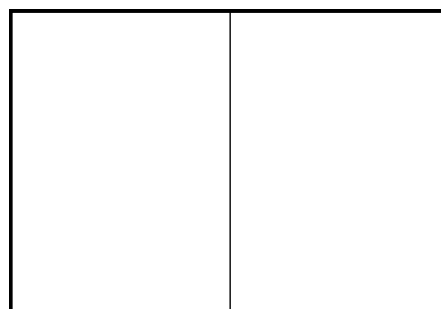
V práve dokončenej úlohe ste zbežne presondovali (predtriedili), a tým získali prvotnú, kvalitatívnu predstavu o tom, ako sú v polrovine rozložené vrcholy uhlov zostrojených nad danou úsečkou a sledovali ste vzdialenosť týchto vrcholov od stredu úsečky.

V nasledujúcej úlohe sa sústreďte na polohy vrcholov pravých uhlov. Zostrojíte sériu navzájom kolmých dvojíc záhybov prechádzajúcich dvoma koncovými bodmi danej úsečky. Zmeriate vzdialenosti priesečníkov týchto záhybov od stredu úsečky. Identifikujete geometrický útvar, ktorý najlepšie zodpovedá pozorovaniam a nameraným hodnotám.

* * *

Úloha 2. Množina vrcholov pravých uhlov zostrojených nad danou úsečkou.

Krok 1. Vezmite hárok papiera formátu A4. Preložte ho na polovicu a otvorte. Zostrojili ste tak stredy hornej a dolnej hrany hárku. Zložením papiera vytvorte záhyb prechádzajúci stredom dolnej hrany a papier roztvorte. Následne vytvorte záhyb, ktorý je kolmý na predchádzajúci a súčasne prechádza stredom hornej hrany. Priesečník týchto záhybov označte krúžkom.



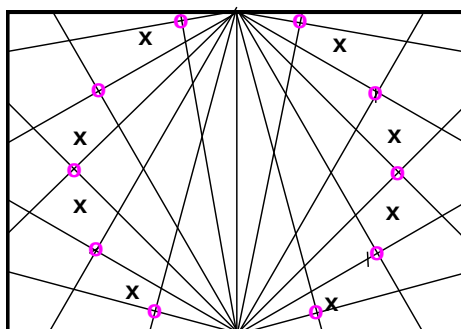
Krok 2. Vytvorte nový záhyb prechádzajúci stredom dolnej hrany hárku. Následne vytvorte záhyb naňho kolmý a súčasne prechádzajúci stredom hornej hrany. Priesečník záhybov označte krúžkom.

Krok 3. Krok 2 viackrát zopakujte. Kvôli presnosti a zreteľnosti je vhodné na každej polovici hárku vytvoriť najviac 3-4 dvojice navzájom kolmých záhybov. Preto použite viac hárkov papiera.

Krok 4. Polohy priesečníkov záhybov (vrcholy pravých uhlov) zo všetkých hárkov preneste na jeden z nich. Presne zlicujte (priložte) dva hárky a prepichnete ich v mieste označených priesečníkov záhybov špendlíkom, alebo pohľadom proti svetlu zistíte potrebné polohy a označte.

Aký geometrický útvar vám pripomína množina vrcholov pravých uhlov s ramenami prechádzajúcimi stredmi dolnej a hornej hrany hárku, ktorú ste práve získali?

Informácia pre učiteľa: Po vykonaní kroku (4) by mali žiaci dostať výsledok podobný zobrazenému na obrázku.



Krok 5. Prehnutím papiera nájdite stred úsečky určenej stredmi dolnej a hornej hrany. Odmerajte vzdialenosti aspoň desiatich vrcholov pravých uhlov od stredu spomínanej úsečky a výsledky zapíšte do tabuľky.

Vrchol pravého uhla číslo	1									
Vzdialenosť vrcholu od stredu úsečky [mm]										

Krok 6. Na základe svojich pozorovaní a meraní vyslovte (napíšte) predpoklad o geometrickom mieste vrcholov pravých uhlov, ramená ktorých prechádzajú koncovými bodmi danej úsečky, vo vašom prípade stredom dolnej a hornej hrany hárku papiera.

* * *

Na základe výsledkov predchádzajúcej úlohy ste dospeli k predpokladu, že vrcholy pravých uhlov zostrojených nad danou úsečkou ležia na kružnici. Skutočne:

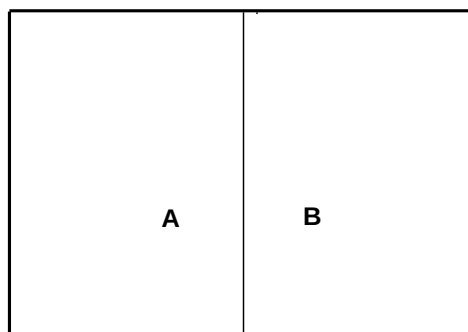
*Množinou všetkých vrcholov pravých uhlov, ktorých ramená prechádzajú dvoma danými bodmi je kružnica k zostrojená nad úsečkou určenou danými bodmi ako priemerom s výnimkou daných bodov. Kružnicu k nazývame **Talesovou kružnicou**.*

V nasledujúcej úlohe sa pozriete, ako je to s polohami vrcholov uhlov, ktoré nie sú pravé. Dvoma špendlíkmi určíte koncové body danej úsečky. Z hárku papiera poskladáte trojuholník. Zasunutím tohto trojuholníka medzi dva špendlíky a vyznačením polohy vrcholu pri rôznych spôsoboch umiestnenia trojuholníka zostrojíte množinu vrcholov uhlov danej veľkosti. Ohnutím papierového trojuholníka napoly a opakovaním postupu vytvoríte množinu vrcholov uhlov o polovičnej veľkosti predchádzajúceho uhla. Na osi úsečky zostrojíte bod zodpovedajúci vrcholu dvojnásobného uhla. Odmeriate potrebné vzdialenosti a identifikujete geometrické útvary, ktoré najlepšie zodpovedajú pozorovaniam a meraniam pre polohy vrcholov daných uhlov zostrojených nad danou úsečkou.

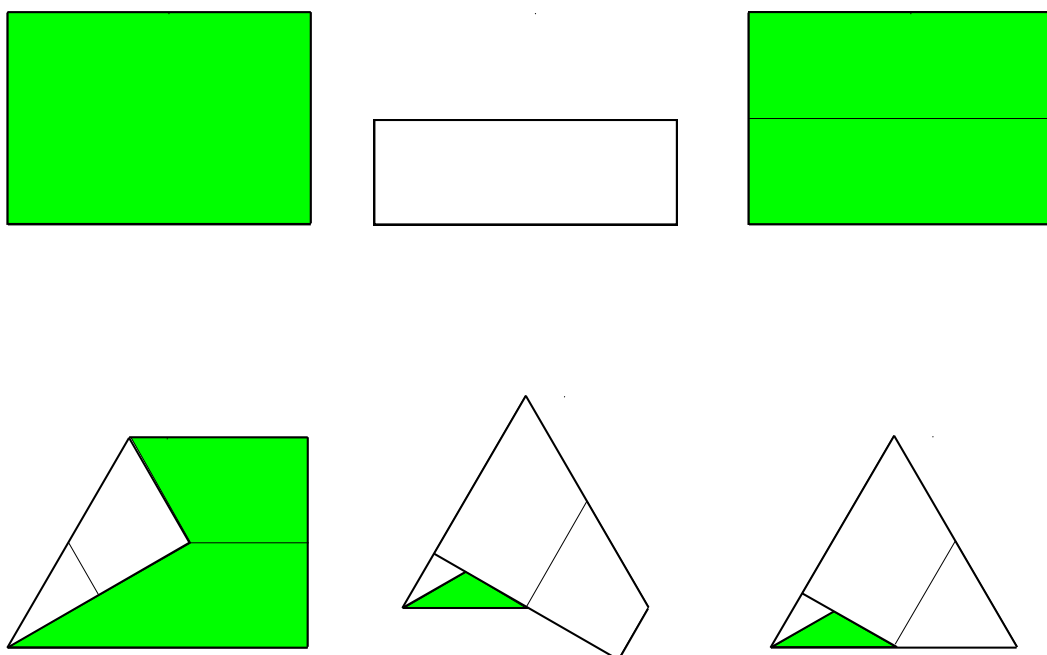
* * *

Úloha 3: Množina vrcholov uhlov iných ako pravých zostrojených nad danou úsečkou

Krok 1. Blízko dlhšej hrany (nie však priamo na hrane) hárku papiera formátu A4 zostrojte dva body A, B, približne 8 cm od seba. Zložením papiera zostrojte os úsečky AB. Hárok položte na vhodnú podložku (napríklad rysovaciu dosku) a do bodov A a B zapichnete špendlíky. Nie až po hlavičku, no aby boli pevne fixované.



Krok 2. Z iného hárku papiera A4 poskladajte podľa návodu trojuholník.

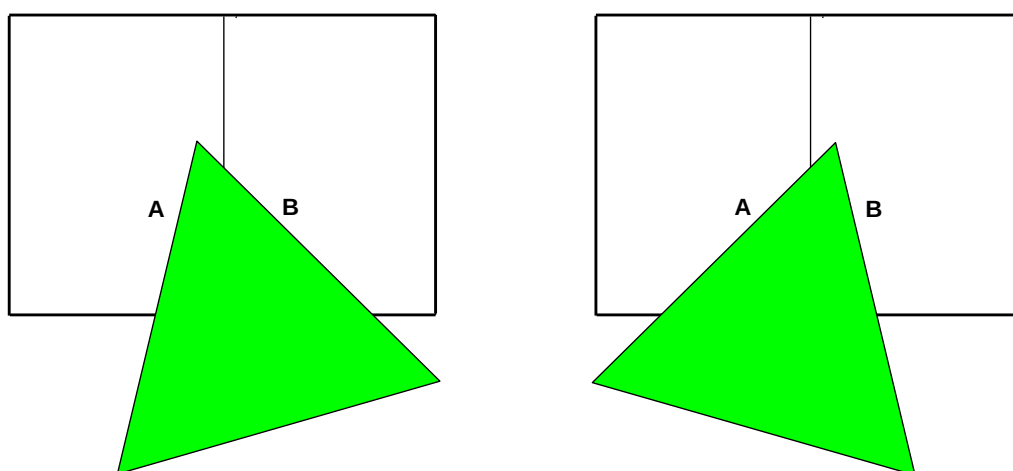


Aký trojuholník ste takto zostrojili? Svoje tvrdenie niekoľkými slovami zdôvodnite.

Ak tento trojuholník zložíme napoly, aké vnútorné uhly bude mať výsledný trojuholník?

Krok 3. Trojuholník, ktorý ste získali v kroku 2 vsuňte medzi špendlíky zabodnuté do hárku papiera, ktoré ste si pripravili v kroku 1. Ramená trojuholníka musia tesne doliehať k špendlíkom, no trojuholník nesmiete pritlačiť veľmi silno, aby sa nezdeformoval. Vyznačte polohu vrcholu vsunutého medzi špendlíky. Pri vyznačovaní použite napr. modrú fixku.

Krok 4. Zmeňte polohu trojuholníka (natočte ho trochu ináč) a vyznačte novú polohu vrcholu.



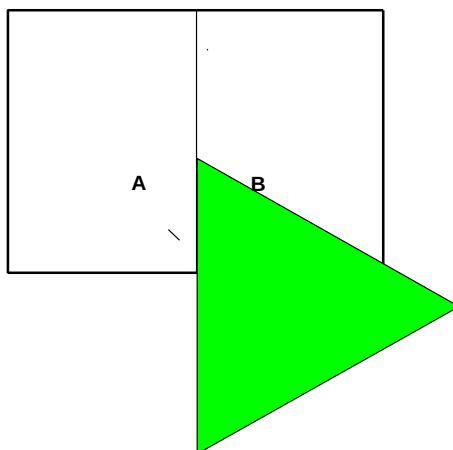
Krok 5. Krok 4 zopakujte viackrát. (Zostrojte pritom i vrchol uhla ležiaci na osi úsečky AB). Získate tak množinu vrcholov uhlov veľkosti 60° , ramená ktorých prechádzajú koncovými bodmi úsečky AB.

Aký geometrický útvar vám práve získaná množina bodov pripomína?

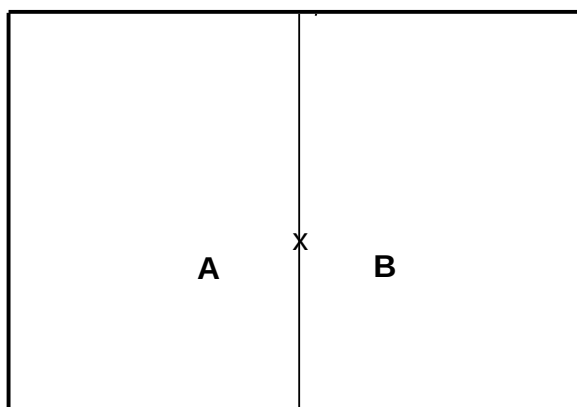
Krok 6. Papierový trojuholník zložte napoly. Trojuholník vložte medzi špendlíky vrcholom, pri ktorom je vnútorný uhol rovný 30° . Postupujte podobne ako v krokoch (4) a (5). Pri vyznačovaní polôh vrcholov však použite napr. červenú fixku. Získate množinu vrcholov uhlov veľkosti 30° , ramená ktorých prechádzajú koncovými bodmi úsečky AB.

Aký geometrický útvar vám pripomína množina bodov, ktorú ste získali?

Krok 7. Na osi úsečky AB zostrojte pomocou vášho papierového trojuholníka vrchol uhla rovného 120° .



Informácia pre učiteľa: Obrázok, ktorý vytvorili žiaci by sa mal podobat' tomuto.



Krok 8. Odmerajte vzdialenosti aspoň desiatich vrcholov 60° uhlov od vrcholu 120° uhla ležiaceho na osi úsečky AB. Hodnoty zapíšte do tabuľky.

Vrchol 60° uhla číslo	1									
Vzdialenosť vrcholu 60° uhla od vrcholu 120° uhla ležiaceho na osi úsečky AB [mm]										

Krok 9. Odmerajte vzdialenosti aspoň desiatich vrcholov 30° uhlov od vrcholu 60° uhla ležiaceho na osi úsečky AB. Výsledky zapíšte do tabuľky.

Vrchol 30° uhla číslo	1									
Vzdialenosť vrcholu 30° uhla od vrcholu 60° uhla ležiaceho na osi úsečky AB [mm]										

Krok 10. Na základe svojich pozorovaní a výsledkov získaných v krokoch (8), (9) a s uvažovaním, že úloha je symetrická, teda, že trojuholník môžete vsunúť medzi špendlíky nielen zo strany bližšej hrany, ale i zo strany opačnej, vyslovte predpoklad o geometrických miestach vrcholov 30° a 60° uhlov, ramená ktorých prechádzajú koncovými bodmi danej úsečky. Svoj predpoklad následne zovšeobecnite na prípad ľubovoľného uhla.

Krok 11. Dva rôzne body A a B ležiace na kružnici k rozdeľujú túto kružnicu na dva oblúky AB. Uhol AXB, ktorého vrchol X je bodom kružnice a ktorého ramená prechádzajú krajnými bodmi oblúku AB nazývame obvodový uhol príslušný k tomu oblúku AB, ktorý v tomto uhle leží. Uhol ASB, ktorého vrchol S je stredom kružnice a ktorého ramená prechádzajú krajnými bodmi oblúku AB nazývame stredový uhol príslušný k tomu oblúku AB, ktorý v tomto uhle leží.

* * *

Na základe svojich výsledkov týkajúcich sa geometrického miesta vrcholov uhlov danej veľkosti zostrojených nad danou úsečkou vyslovte predpoklad o vzťahu obvodového a stredového uhla príslušného k danému oblúku kružnice.

* * *

3.4 Postupnosti a rady

Často môžete počuť, ako niekto diktuje priateľovi telefónne číslo, alebo vidieť dieťa, ako hodí na zem gumenú loptu. V prvom prípade začujete niečo ako: „Píš si: 0, 9, 1, 3, 7, 5, 9, 1, 1, 4“. V druhom prípade zbadáte, ako sa lopta odrazí od zeme a začne skákať. Výška, do ktorej vyskočí, je stále menšia a menšia, až nakoniec ostane lopta ležať na zemi.

Telefónne číslo a hodnoty výšok postupných odskokov lopty predstavujú rôzne príklady číselnej postupnosti. Ako tieto príklady naznačujú, postupnosti slúžia ako matematický model mnohých objektov, javov, či dejov v našom okolí (všeobecne známym príkladom je zložené úročenie vkladov v bankách).

V nasledujúcej časti sa dozviete, čo to vlastne postupnosti sú, zistíte, čo majú postupnosť tvoriaca telefónne číslo a postupnosť výšok odskokov lopty spoločné a v čom sa líšia, oboznámite sa s mnohými vlastnosťami rôznych typov postupností.

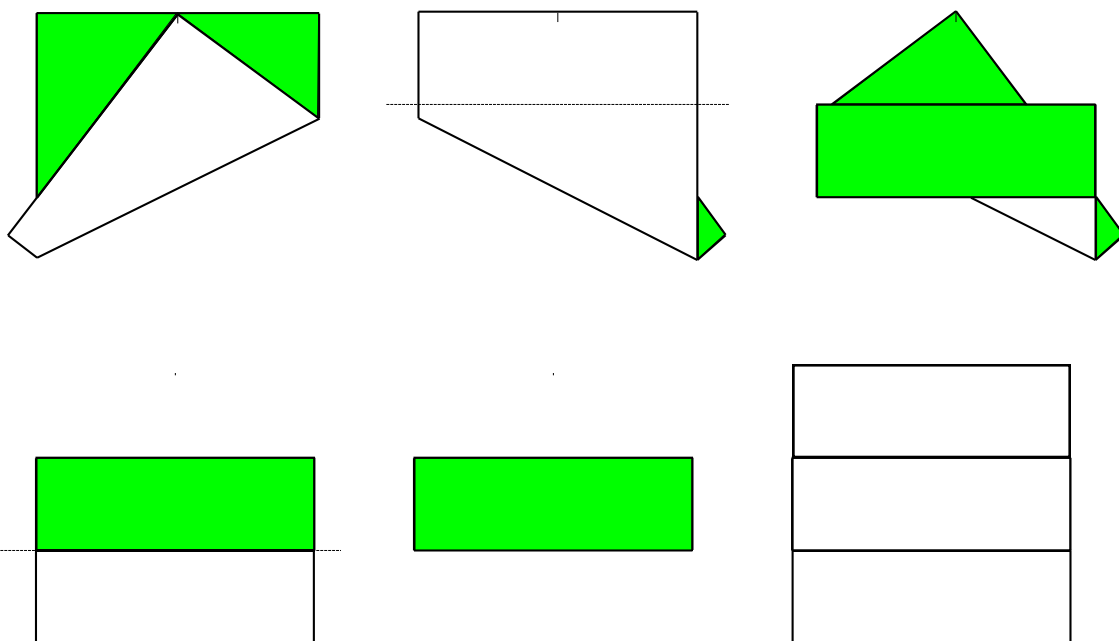
V prvej úlohe sa naučíte poskladať zo štvorca papiera model ulity. Na hotovom modeli odmeriate dĺžky jednotlivých priamych úsekov tvoriacich jeho obvod. Počas analýzy nameraných údajov sa zoznámite s pojmom číselná postupnosť a s niekoľkými (nie všetkými) spôsobmi, ako možno danú postupnosť určiť.

* * *

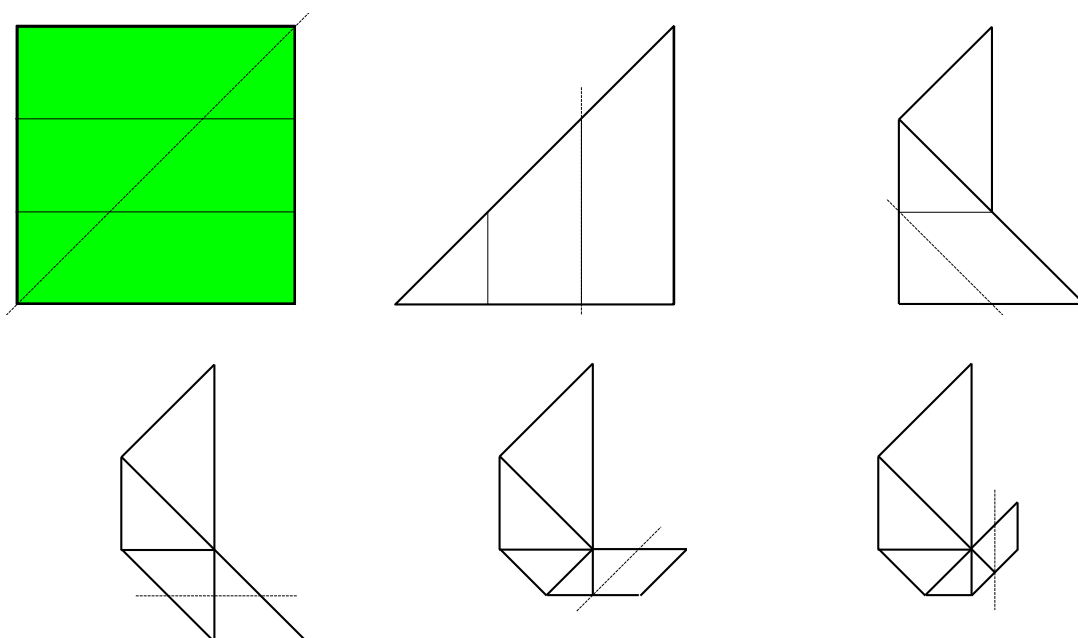
Úloha 1. Papierová ulita a zvláštnosť jej obvodu.

Krok 1. Aby ste mohli pristúpiť k skladaniu ulity, potrebujete rozdeliť štvorec papiera na tretiny. Keďže táto operácia sa nielen bežne vyskytuje pri skladaní rôznych origami modelov, no často potrebujete zložiť na tretiny samotný hárok, venujeme skladaniu hárku na tretiny samostatný krok.

Vezmite štvorec papiera. Preložte ho tak, že pravý dolný roh ľahne na stred hornej hrany a vytvorte záhyb. Ďalej pokračujte podľa návodu.

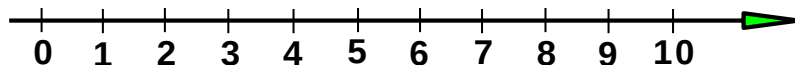


Krok 2. Vezmite štvorec papiera, ktorý je záhybmi rozdelený na tretiny. Podľa návodu z neho poskladajte papierovú ulitu.

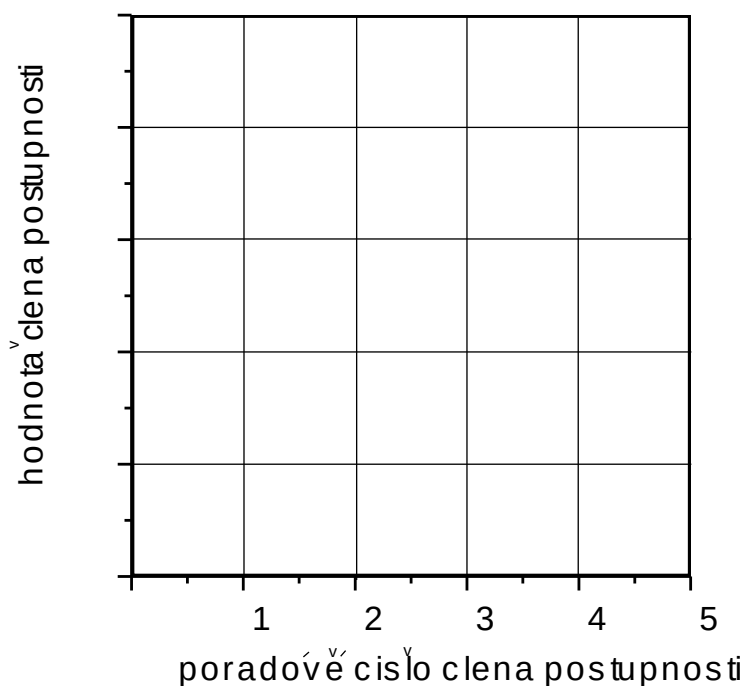


Krok 5. Postupnosť môžete znázorniť graficky. Buď na číselnej osi tak, že znázorníte iba hodnoty členov postupnosti, alebo pomocou grafu, ktorý tvoria izolované body.

Znázornite výsledky z kroku 3 na číselnej osi.



Zostrojte graf postupnosti z kroku 3. Najprv očiachujte (označte) os „hodnota člena postupnosti“ a potom zostrojte príslušné body.



Niekoľkými slovami popíšte správanie členov študovanej postupnosti.

Krok 6. Z postupnosti získanej v kroku 3 vytvorte dve nové postupnosti. Členy prvej z nich nech predstavujú rozdiel dvoch po sebe idúcich členov pôvodnej postupnosti, konkrétne

$$a_n = u_{n+1} - u_n.$$

Členy druhej z nich nech predstavujú podiel dvoch po sebe idúcich členov pôvodnej postupnosti, konkrétne

$$b_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Výsledky zapíšte do tabuľky. Výsledky delenia zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

N	1	2	3	4	5
u_n					
$u_{n+1} - u_n$					
$\frac{u_{n+1}}{u_n}$					

Niekoľkými slovami popíšte charakter postupností $u_{n+1} - u_n$ a $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

* * *

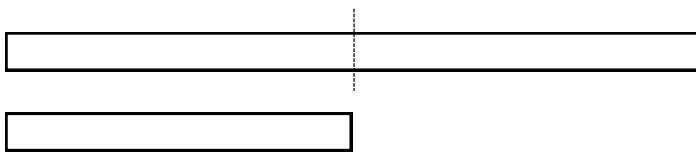
V predchádzajúcej úlohe ste sa zbežne zoznámili s pojmom číselná postupnosť a člen postupnosti. Dozvedeli ste sa, že postupnosť môže byť určená vymenovaním všetkých jej členov, zostrojením tabuľky, či nakreslením grafu. V nasledujúcej úlohe sa oboznámite s ďalšími spôsobmi určenia postupnosti, a to rekurentným vyjadrením postupnosti a zadaním predpisu pre výpočet n-tého (všeobecného) člena.

Budete skladať papierové pásy, farbiť niektoré časti poskladaných pásov a prerázať v nich diery. Budete študovať rôzne číselné postupnosti spojené s počtom preložení pásy a hľadať pravidlá pre popis takýchto postupností. Zoznámite sa so špeciálnym typom postupnosti – geometrickou postupnosťou.

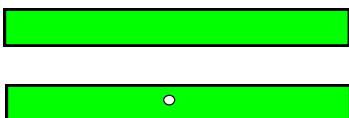
* * *

Úloha 2. Skladaním papierovej pásy vytvárame číselné postupnosti.

Krok 1. Pripravte si päť papierových pásov asi 60 cm dlhých. Vezmite jednu pásku a prehnite ju napoly tak, že pravý okraj priložíte na ľavý a pásku pritlačíte.



Hornú stranu zloženej pásky nafarbite (farebnou ceruzou, fixkou, a pod.). Potom do zloženej a nafarbenej pásky prerazte dierkovačom dieru.



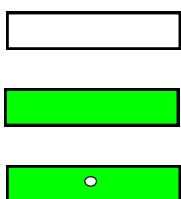
Pásku rozložte.



Krok 2. Vezmite si ďalšiu pásku. Prehnite ju napoly tak, že pravý okraj priložíte na ľavý a pásku pritlačíte. Hornú stranu zloženej pásky nafarbite.



Stále zloženú pásku ešte raz zohnite napoly tak, že pravý okraj priložíte na ľavý a pásku pritlačíte. Hornú stranu zloženej pásky opäť nafarbite. Do takto poskladanej a nafarbenej pásky prerazte dierkovačom dieru.



Pásku rozložte.



Krok 3. Vezmite si tretiu pásku. Opakujte krok 2 s tým rozdielom, že teraz pásku postupne prehnate a nafarbíte tri krát. Až potom do zloženej páske prerazíte dieru. Ďalšiu pásku prehnate štyrikrát, poslednú päťkrát. Po predierkovaní páske rozložte.

Krok 4. Spočítajte diery v jednotlivých páskach. Výsledky zapíšte do tabuľky. V prvom riadku bude zapísaný počet prenutí páske, v druhom celkový počet dier v páske, do tretieho riadku zapíšte pomer počtu dier v nezafarbenej časti páske k celkovému počtu dier.

Počet prenutí páske	1	2			
Celkový počet dier	2	4			
Pomer počtu dier v nezafarbenej časti páske k ich celkovému počtu	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			

Popíšte slovami, ako sa s počtom prenutí páske mení celkový počet dier v nej prerazených.

Ako sa mení pomer počtu dier v nezafarbenej časti páske k celkovému počtu dier? Iste vám neuniklo, že celkový počet dier je rovný počtu vrstiev papiera, ktoré sú na sebe naskladané po danom počte prenutí a že pomer počtu dier v nezafarbenej časti k celkovému počtu dier udáva, aká časť páske ostala nezafarbená.

Krok 5. Po analýze výsledkov predpovedzte, koľko dier bude mať páska, ktorú prehnate 6 krát, 7 krát a aká časť týchto dier bude v nevyfarbenej časti páske.

Počet dier v páske prehnutej šesť krát =

Počet dier v páske prehnutej sedem krát =

Počet dier v nevyfarbenej časti páske prehnutej 6x =
Celkový počet dier v páske prehnutej 6x

Počet dier v nevyfarbenej časti pásy prehnutej 7x =
Celkový počet dier v páske prehnutej 7x

Krok 6. Pri riešení úlohy 1 ste sa dozvedeli, že množiny čísel, ako sú tie zapísané v prvom a druhom riadku v tabuľke vytvorenej v kroku 4, predstavujú postupnosti. Ak ako u_n označíte celkový počet dier prerazených v páske prehnutej n krát, čomu sa rovnajú nasledujúce podiely členov postupnosti?

$$\frac{u_2}{u_1} =$$

$$\frac{u_3}{u_2} =$$

$$\frac{u_5}{u_4} =$$

Krok 7. Hovoríme, že postupnosť je daná *rekurentne* ak je daný predpis na výpočet nasledujúceho člena postupnosti pomocou jedného alebo viacerých predchádzajúcich členov postupnosti. Na základe svojich výsledkov z predchádzajúcich krokov napíšte rekurentný vzťah medzi členmi postupnosti predstavujúcej celkový počet dier v páske pre rastúci počet prenutí,

$$u_n =$$

Svoj výsledok zdôvodnite.

Krok 8. Postupnosť možno určiť i priamo zadaním vzorca pre výpočet n -tého (všeobecného) člena postupnosti bez odvolávania sa na predchádzajúce členy. Na základe svojich pozorovaní a výsledkov predchádzajúcich krokov napíšte vzťah (pravidlo, formulu, vzorec) ktorý vyjadří celkový počet dier prerazených v páske prehnutej daný počet krát,

$$u_n =$$

Svoj výsledok zdôvodnite.

Krok 9. Postupnosť, v ktorej každý člen je vytváraný rekurentne vynásobením predchádzajúceho člena konštantou sa nazýva *geometrická postupnosť*. Konštantný činiteľ (konštanta) sa nazýva *kvocient*.

Je postupnosť čísel vyjadrujúcich celkový počet dier v páske pre rastúci počet prehnutí geometrická? Ak áno, aký je jej kvocient?

Čo môžete povedať o postupnosti čísel vyjadrujúcich pomer počtu dier v nezafarbenej časti pásky k celkovému počtu dier pre rastúci počet prehnutí pásky ?

4 Pilotné testovanie

Po dohode s pani riaditeľkou sa pilotné testovanie niektorých z pripravených príkladov uskutočnilo na hodinách matematiky na ZŠ Želiarska 4 v Košiciach.

Testovania sa zúčastnilo 10 žiakov ôsmeho ročníka a 12 žiakov deviateho ročníka. Išlo o bežné triedy, v ktorých boli zastúpení jednotkári i štvorkári.

Prospech z matematiky žiakov testovaných tried na polročnom vysvedčení v školskom roku 2011/2012:

Známka	1	2	3	4	5
8. trieda	2	5	3	0	0
9. trieda	1	4	3	4	0

Oblúbenosť matematiky u žiakov bola tradične nízka. Kladný vzťah k matematike proklamoval jeden ôsmak a traja deviataci. Neutrálne sa k matematike stavali traja ôsmaci a piati deviataci. Matematiku vyslovene nemali radi šiesti ôsmaci a štyria deviataci. Veľká väčšina žiakov mala doma počítač i prístup na internet. Internet nemal doma jeden ôsmak, počítač ani internet nemal jeden deviatak.

Prvý test prebehol v ôsmej triede v rozsahu jednej vyučovacej hodiny a to v stredu na piatej vyučovacej hodine v tradične usporiadanej triede. Žiaci riešili prvú úlohu z celku venovaného množine vrcholov uhlov zostrojených nad danou úsečkou (Úloha 1 z kapitoly 3.2). Nedlho predtým žiaci prebrali na hodine matematiky Talesovu kružnicu, to jest učivo, ktoré s testovanou témou súviselo.

Žiaci pracovali v dvoch trojčlenných a dvoch dvojčlenných skupinách podľa inštrukcií v pracovných listoch, ktoré dostali. Časy potrebné na splnenie jednotlivých etáp, sme odhadli nasledovne: poskladanie modelu 7 až 10 minút, roztriedenie priesečníkov záhybov podľa veľkosti uhla pod ktorým vidieť danú úsečku 8 až 10 minút, uskutočnenie potrebných meraní vzdialeností 7 až 10 minút. Tento predpokladaný časový harmonogram splnila jedna skupina žiakov. Ostatným ostávalo na konci vyučovacej hodiny uskutočniť niekoľko posledných meraní.

Najviac problémov robilo žiakom zorientovať sa v záhyboch záhybového vzoru a identifikovať uhly, veľkosť ktorých mali posudzovať. Menej problémov mali s poskladaním modelu a najľahšie im išlo meranie vzdialeností.

Žiaci pri riešení úlohy navzájom diskutovali, v rámci skupiny i medzi skupinami. Snažili sa, pracovali, neodbiehali od témy. Na záver žiaci vyjadrili názor, že takýto spôsob vyučovania je zaujímavejší ako bežná hodina matematiky.

Druhého testu sa zúčastnili žiaci deviateho ročníka v rozsahu dvoch vyučovacích hodín v stredu na tretej a štvrtej vyučovacej hodine. Tento pilotný test prebehol v počítačovej miestnosti. K dispozícii bolo 13 počítačov pre žiakov a jeden pre učiteľa. Obsah obrazovky učiteľovho počítača bolo možné pomocou projektoru premietnuť na väčšiu plochu. Počítače žiakov boli umiestnené na stoloch zoradených po obvodu miestnosti.

Každý žiak pracoval pri jednom počítači, pričom podľa potreby mohol diskutovať so susedom. Žiaci podľa inštrukcií v pracovných listoch pracovali na „motivačnom“ workshope 3.1, pričom na otázky odpovedali elektronicky pomocou stránky polleverywhere.com. Medzi odpoveďami na prvé tri otázky (otázky s otvorenou odpoveďou) sa okrem seriózných odpovedí objavilo aj niekoľko menej vážnych. Po poskladaní origami modelu na otázku, či podľa nich môže byť toto umenie skladania (origami) nejako spojené s matematikou, odpovedalo 8 žiakov áno a 4 nie.

Možno konštatovať, že žiakov najviac zaujalo skladanie origami modelu podľa návodu z internetu, čo otvorene priznali i prakticky dokázali úspešným poskladaním modelov. Záujem vzbudila i „internetová“ prednáška Roberta Langa, najmä realistikosť jeho modelov zvierat a hmyzu. O spájanie origami s matematikou však už taký záujem nebol. Jeden žiak to vystihol slovami: „Origami ako skladanie modelov je zaujímavé, no matematika už zaujímavá nie je.“

Workshopový formát vyučovania narušuje a mení zaužívané usporiadanie školskej hodiny. Každé narušenie tradičnej výuky môže u študentov podvedome vyvolať pocit, že nejde o regulárne vyučovanie, ale o nejakú „mimoškolskú“ aktivitu, čo môže skresľovať reakcie žiakov pri testovaní inovatívnych metód, keďže nie sú na takéto metódy zvyknutí a pripravení.

Pri celoplošnom a dlhodobom prechode na podobné formy vyučovania bude pravdepodobne potrebná istá adaptačná doba, aby žiaci a ich rodičia takéto metódy prijali („žiaci sa v škole iba hrajú a neučia sa“).

Záver

Štúdia OECD PISA skúmajúca matematickú gramotnosť žiakov i pozorovania samotných učiteľov naznačujú, že v poslednej dobe klesá záujem žiakov o matematiku (no nie len o ňu), znižuje sa úroveň porozumenia matematickým pojmom, schopnosť riešiť problémy, ochota usilovne pracovať pri získavaní vedomostí.

Za vinníka je viac-menej jednomyseľne označovaný spôsob, akým sa matematika tradične vyučuje – učiteľ odovzdáva hotové a utriedené poznatky a vedomosti žiakom, ktorí ich pasívne prijímajú. Nápravu by mal priniesť prechod k aktivizujúcim kolaboratívnym formám vyučovania, v ktorých študent v spolupráci s rovesníkmi aktívne znovuobjavuje poznatky a vedomosti sám.

Nebezpečenstvom tejto koncepcie vyučovania je, že žiaci budú mať menej vedomostí, tieto vedomosti budú menej systematické a menej usporiadané.

Na druhej strane sa u žiakov rozvíja samostatnosť, schopnosť hľadať informácie, schopnosť riešiť problémy, kritické myslenie, tvorivosť.

Úlohou vyučovania školskej matematiky nie je „produkovať“ matematikov. Primárnym cieľom je matematizovať myslenie detí. Preto pokles množstva matematických vedomostí pri súčasnom zvýšení kvality myslenia je viac než prijateľnou cenou.

Do tejto koncepcie zapadá workshopový formát vyučovania. Predložená práca ponúka motivačný workshop ilustrujúci prínos poznatkov získaných matematizáciou procesu skladania papiera pre bežný život a niekoľko príkladov využívajúcich skladanie papiera – origami – ako „experimentálne laboratórium“, v ktorom možno znovuzískavať poznatky z vybraných oblastí (Pytagorova veta, množina vrcholov daných uhlov zostrojených nad danou úsečkou, postupnosti) v rámci matematického workshopu.

Pilotné testovanie niekoľkých z vytvorených príkladov ukázalo, že deti radi skladajú papierové modely. Žiaci, ktorí sa testu zúčastnili, vyslovili názor, že takýto spôsob vyučovania matematiky by ich pravdepodobne bavil viac než tradičný, no istí by si boli, až keď by si to vyskúšali dlhšiu dobu.

Keďže u nás zatiaľ neexistuje ucelený dlhodobý program vyučovania matematiky workshopovým spôsobom, vytvorené príklady možno využiť na spestrenie a zatriktívnenie tradičného vyučovania alebo na matematickom krúžku.

Zoznam použitej literatúry

BIZZARO, P. Workshop: An Ontological Study. In: Donnelly, D. *Does the Writing Workshop Still Work?*, Bristol: Multilingual Matters, 2010, pp. 36-51. ISBN 978-1-84769-289-9.

BOAKES, N.J. The Impact of Origami-Mathematics Lessons on Achievement and Spatial Ability of Middle-School Students. In: Lang, R.J. *Origami 4. Forth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Natick, MA: AK Peters, 2009. ISBN 978-1-56881-346-2, p.471-481.

BRADY, K. Using Paper-Folding in the Primary Years to Promote Student Engagement in Mathematical Learning. In *Navigating Currents and Charting Directions: Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*. Brisbane: MERGA Inc., 2008. ISBN 978-1-920846-16-3. P. 77-83.

BRUNOVSKÝ, P. Potrebujeme matematiku? (Prednáška odznela v cykle profesorských prednášok v Aule UK 4.12. 2002 na pozvanie rektora UK). Dostupné na internete: <http://www.uniba.sk/fileadmin/user_upload/editors/subory/veda/prof_prednasky/prof_prednaska_Brunovsky.pdf>

COAD, L. Paper Folding in the Middle School Classroom and Beyond. In *The Australian Mathematics Teacher*, 2006, vol. 62, no.1, p. 6-13.

EINSENBERG, M. - NISHIOKA, A. Orihedra. Mathematical Sculptures in Paper. In *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 1997, vol.1, no.3, p. 225-261.

FOESTER, P.A. *Precalculus with Trigonometry. Concepts and Applications*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2003. 784 p. ISBN 1-55953-391-9.

FOSNOT, C.T.-DOLK, M. *Young Mathematicians at Work: Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001. 216 p. ISBN 0-325-00353-x

FOSNOT, C.T.-DOLK, M. *Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001. 192 p. ISBN 0-325-00354-8.

FOSNOT, C.T.-DOLK, M. *Young Mathematicians at Work: Constructing Fractions, Decimals, and Percents*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2002. 192 p. ISBN 0-325-00355-6.

FOSNOT, C.T.-JACOB, B. *Young Mathematicians at Work: Constructing Algebra*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2010. 224 p. ISBN 0-325-02841-9.

FRIBERG, J. *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. Singapore: World Scientific Publishing, 2007. 496 p. ISBN 978-981-270-452-8.

GARDNER, M. *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. Chicago: The University of Chicago Press, 1987. 255 p. ISBN 0-226-28253-8.

GEORGESON, J. Fold in Origami and Unfold Math. In *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2011, vol.16, no.6, p. 354-361.

GOLAN, M.- JACKSON, P. Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami. In. Lang, R.J. *Origami 4. Forth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Natick, MA: AK Peters, 2009. ISBN 978-1-56881-346-2, p. 459-469.

GOLAN, M. Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In. Wang-Iverson, P. et al. *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*, Boca Raton: AK PETERS/ CRC Press, 2011. ISBN 978-1-56881-714-9, p.141-150.

HAGA, K. *Origamics: Mathematical Explorations through Paper Folding*. Singapore: World Scientific, 2008. 152 p. ISBN 978-981-283-490-4.

HASTINGS, N.B.-REYNOLDS, B. *Workshop Calculus with Graphing Calculators: Guided Exploration with Review*. Volume 1. New York: Springer-Verlag, 1999. 442 p. ISBN 0-387-98636-7.

HEJNÝ, M. Objevování neeuklidovské geometrie (Pohled učitele). In: *Člověk – umění – matematika. Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky*. (Czech). Praha: Prometheus, 1996. p. 106-126.

HEJNÝ, M. Komunikační a interakční strategie učitele v hodinách matematiky. In Hejný, M. a kol. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. 1. díl, Praha: Univerzita Karlova, 2004, ISBN 80-7290-189-3, s. 43-61.

JOHNSON, D. A. *Paper Folding for the Mathematics Class*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1957. Dostupné na internetu: <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED077711.pdf>

KUPKOVÁ, A. *Matematika a origami: bakalárska práca*. Košice: UPJŠ, Košice, 2010. 58 s.

LANG, R.J. *Origami and Geometric Constructions*. (nepublikovaný rukopis, 2003). Dostupné na internetu: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf

LANG, R.J. editor. *Origami 4. Forth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Natick, MA: AK Peters, 2009, 570 p. ISBN 978-1-56881-346-2.

LAWS, P.W. Calculus-Based Physics without Lectures. In *Physics Today*. 1991, vol. 44, no. 12, p. 24-31.

MAEKAWA, J. *Genuine Origami. 43 Mathematically-Based Models, from Simple to Complex*. Tokio: Japan Publication Trading, 2008. 160 p. ISBN 978-4889962512.

MIURA, K. Triangles and Quadrangles in Space. In Domingo, A. et al. *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures. Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*. Valencia: Universidad Politecnica de Valencia, 2009. ISBN 978-84-8363-461-5 p. 27-38.

MORROW, J.- MORROW, Ch. Close Observation and Reverse Engineering of Origami Models. In. Wang-Iverson, P. et al. *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*, Boca Raton: AK PETERS/ CRC Press, 2011. ISBN 978-1-56881-714-9, p. 189-203.

MURDOCK, J.-KAMISCHE, E.-KAMISHE, E. *Discovering Advanced Algebra: An Investigative Approach*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2004. 874 p. ISBN 1-55953-606-3.

MURDOCK, J.-KAMISCHE, E.-KAMISCHE, E. *Discovering Algebra: An Investigative Approach*. 2nd Edition, Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2007. 721 p. ISBN 1-55953-763-9.

OVERHOLT, J.- KINCHELOE, L. *MathWise!* 2nd Edition. San Francisco, CA: Jossey-Bass, 2010. 448 p. ISBN 978-0-470-47199-9.

PELLEGRINO, S.-VINCENT, J.F.V. How to Fold a Membrane. In. Pellegrino, S. *Deployable Structures*. Wien: Springer, 2001, ISBN 978-3-211-83685-9, p. 59-74.

POPE, S.- LAM, T.K. Using Origami to Promote Problem Solving, Creativity and Communication in Mathematic Education. In. Lang, R.J. *Origami 4. Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Natick, MA: AK Peters, 2009. ISBN 978-1-56881-346-2, p. 517-524.

POPE, S.- LAM, T.K. Origami and Learning Mathematic. In. Wang-Iverson, P. et al. *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*, Boca Raton: AK PETERS/ CRC Press, 2011. ISBN 978-1-56881-714-9, p. 205-217.

REDISH, E.F. *Teaching Physics with the Physics Suite*. New York: Wiley, 2003. 232 p. ISBN 978-0-471-39378-8.

ROSSMAN, A.-CHANCE, B.L.-LOCK, R.H. *Workshop Statistics: Discovery with Data and Fathom*, 3rd Edition, Willey, 2008. 674 p. ISBN-13: 978-0470413562

ROW, S.T. *Geometric Exercises in Paper Folding*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1901. Dostupné na internete:
<<http://www.archive.org/details/tsundararowsgeom00sunduoft>>

SERRA, M. *Discovering Geometry: An Investigative Approach*. 4th Edition, Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2008. 834 p. ISBN 978-1-55953-882-4.

SPARKS, J.C. *The Pythagorean Theorem. Crown Jewel of Mathematics*. Bloomington, IN: Author House, 2008. 190 p.

ŠEDIVÝ, O.- VALLO, D. *Základy elementárnej geometrie*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa, 2009. 126 s. ISBN 978-80-8094-623-4.
www.km.fpv.ukf.sk/upload_publikacie/20110517_183253__1.pdf

WURST, I.- WURST, S. *Skladaj s nami!* Trenčín: Anagram, 2003. 32 s. ISBN 80-968764-8-1.

ŽILKOVÁ, K. Skladanie papiera v dynamickej geometrii. In *Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania: Zborník príspevkov z konferencie s medzinárodnou účasťou – Tále 2009*. Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, IBSN 978-80-8083-742-6. s. 237-242.

Prílohy

Príloha A: Ukážka z „Workshop Calculus“

Príloha A: Ukážka z „Workshop Calculus“

Preklad časti úlohy z knihy HASTINGS, N.B.-REYNOLDS, B *Workshop Calculus with Graphing Calculators: Guided Exploration with Review*.

Odsek 2

Analyzovanie lineárnych funkcií

Svoje štúdium funkcií začnete použitím detektoru pohybu na vytvorenie svojich vlastných funkcií. Keď chodíte, skáčete alebo bežíte pred detektorom pohybu, ten vysiela rad ultrazvukových pulzov, ktoré sa odrazia od objektu v ich trajektórii (v tomto prípade od vás) a vrátia sa do detektora. Počítač alebo kalkulačka zaznamenajú čas, ktorý trvá každému zvukovému pulzu prejsť uzavretej dráhy medzi detektorom a objektom, použije túto informáciu na výpočet vzdialenosti objektu od detektoru a okamžite zobrazí na obrazovke pohybom vygenerovaný graf vzdialenosť verzus čas.

V prvej úlohe použijete detektor pohybu na vytvorenie niekoľkých lineárnych funkcií - to jest funkcií ktorých grafy sú priamky – a potom nájdete výraz, ktorý modeluje vaše krivky. Vytvoríte rastúce a klesajúce funkcie a vyšetrite ako menenie rýchlosti ktorou sa pohybujete ovplyvňuje tvar grafu reprezentujúceho váš pohyb. Vyšetrite niekoľko spôsobov ako reprezentovať funkciu a porozmýšľate o význame definičného oboru a oboru funkčných hodnôt. Skôr než začnete úlohu, zopakujte si základy práce s kalkulačkou, ako používať nástroje Počítačom Podporovaného Laboratória a ako analyzovať dáta zhromaždené PPL systémom pre vašu grafickú kalkulačku.

Úloha 1-4: Vytváranie lineárnych funkcií

Ako budete prechádzať touto úlohou, prečítajte si veľmi pozorne každú otázku skôr než začnete. Pokúste sa urobiť presne to, čo sa hovorí. Pracujte ako tím. Počítajte spoločne. Porovnajte svoje výsledky. Hovorte o tom čo sa práve robí. Pomáhajte si navzájom. Ubezpečte sa, že každá osoba sa vystrieda pri použití detektoru pohybu. Môžete vyskúšať množstvo časov. Získajte časy správnym spôsobom. Získajte vzdialenosti správnym spôsobom.

Pripojte detektor pohybu k svojej grafickej kalkulačke a otvorte program MOTION.

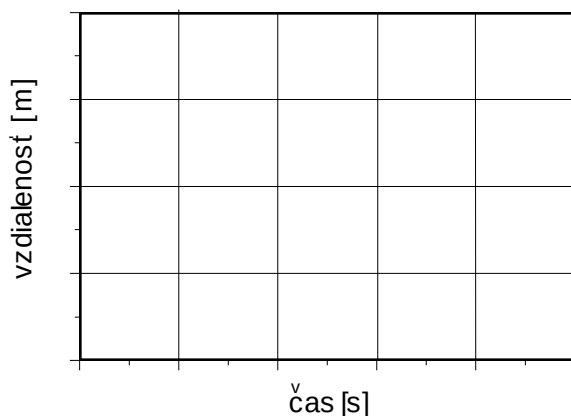
1. Vytvorte dva lineárne grafy tak, že zväčšujete svoju vzdialenosť od detektoru.

a. Vytvorte graf zväčšovaním svojej vzdialenosti kráčajúc veľmi pomaly. Začnite na značke 0,5 metra. Zväčšujte svoju vzdialenosť od detektoru veľmi pomalou chôdzou, konštantným krokom, počas 5 sekúnd. Skúšajte to, pokiaľ nie ste so svojim grafom spokojní.

b. Uložte dáta pre svoj prvý graf.

c. Vytvorte druhý graf zväčšovaním svojej vzdialenosti kráčajúc trochu rýchlejšie ako pri prvom grafe. Začnite na značke 0,5 metra. Zväčšujte svoju vzdialenosť od detektoru trochu rýchlejšou chôdzou, konštantným krokom. Ako ste to robili pri prvom grafe, skúšajte to, pokiaľ nebudete s výsledkom spokojní.

d. Načrtnite grafy funkcií na nižšie daných osiach. Ociachujte osi.



e. Vypnite program MOTION a vráťte sa k základnej obrazovke.

2. Zaoberajte sa lineárnymi funkciami, ktoré ste vytvorili vzd'ľovaním sa od detektoru v časti 1

a. Pozrite sa na grafy týchto dvoch funkcií v grafickom okne svojej kalkulačky.

b. Analyzujte prvý graf, ktorý ste vytvorili idúc veľmi pomaly.

(1) Použite svoj graf na odhad vašej vzdialenosti, keď

(a) $t = 1$ sekunda

(b) $t = 3,5$ sekundy

(2) Jednou alebo dvoma vetami popíšte proces, ktorý ste použili aby ste, vychádzajúc z vášho grafu, našli vašu vzdialenosť v danom čase.

(3) Hoci ste sa pokúšali ísť ustáleným krokom, graf reprezentujúci váš pohyb je pravdepodobne trochu hrbol'atý. Pokúste sa nájsť priamku, ktorá aproximuje alebo „fituje“ váš graf.

(a) Aproximujte sklon priamky, ktorá najlepšie fituje váš graf.

(b) Nájdite rovnicu priamky, ktorá najlepšie fituje váš graf použijúc „bod – sklon“ rovnicu pre priamku a hodnotu pre sklon z bodu (a)

c. Analyzujte druhý graf, ktorý ste vytvorili idúc o trochu rýchlejšie.

(1) Nájdite rovnicu, ktorá reprezentuje vašu novú funkciu fitovaním vášho grafu priamkou.

(2) Ak d je pomenovanie vašej funkcie, potom $d(t)$ – čo sa číta „ d funkcia t “ – dáva výstup, alebo vašu vzdialenosť od detektoru, v čase t . Využite svoj graf na aproximáciu hodnôt

(a) $d(0, 1)$

(b) $d(2, 3)$

(3) Vyjadrite vašu novú funkciu *tabuľkou* aproximujúc hodnoty pre $d(t)$ v niektorých špecifických časoch.

T	1,5	2,1	2,9	3,8
$d(t)$				

(4) Popíšte, v akom vzťahu sú stĺpce tabuľky k bodom vášho grafu.

d. Sklon priamky predstavuje vaše *tempo zmeny* alebo vašu *rýchlosť*. Popíšte, ako rýchlosť ktorou idete ovplyvňuje veľkosť sklonu funkcie modelujúcej váš pohyb.

e. Ak zväčšujete svoju vzdialenosť od detektoru, sklon príslušného grafu je vždy kladný. Vysvetlite prečo.

f. *Definičný obor* funkcie je množina všetkých prípustných vstupných hodnôt.

V prípade funkcie vygenerovanej detektorom definičným oborom je časový interval, počas ktorého detektor zhromažďuje údaje.

(1) Nájdite hodnotu t ktorá je v definičnom obore druhej funkcie, ktorú ste vytvorili. Určte veľkosť a vyznačte príslušnú polohu na horizontálnej osi náčrtku ktorý ste zhotovili v časti 1.

(2) Udajte hodnotu t ktorá nie je v definičnom obore druhej funkcie.

(3) Nájdite definičný obor druhej funkcie.

(4) Všeobecne popíšte, ako môžete určiť definičný obor funkcie z pohľadu na jej graf.

- V ďalšej časti úlohy 1-4 sa tento proces zopakuje, no teraz sa študenti k detektoru približujú. Miesto definičného oboru študujú obor funkčných hodnôt. Nakoniec sledujú, čo sa stane ak pred detektorom iba stoja.

Záverečný text po úlohe 1 – 4:

Keď ste v poslednej úlohe vytvárali jednotlivé grafy, vaša rýchlosť zmeny polohy bola konštantná. V dôsledku toho bolo možné grafy reprezentujúce váš pohyb modelovať priamkou. Čo sa stane, ak meníte vašu rýchlosť zmeny? Ako to ovplyvní tvar príslušného grafu? V nasledujúcom odseku preskúmate odpovede na tieto otázky, keď sa vaša rýchlosť zmeny polohy bude meniť spojite, napríklad keď pôjdete rýchlejšie a rýchlejšie a rýchlejšie. Najprv však preveríte situáciu keď sa pohybujete jednou konštantnou rýchlosťou zmeny polohy, následne inou konštantnou rýchlosťou a následne ešte inou. V tomto prípade graf reprezentujúci váš pohyb pozostáva zo skupiny úsečiek. Hovoríme, že graf je *po častiach lineárny*, keďže každá časť grafu sama o sebe je časť priamky. V nasledujúcej úlohe budete prechádzať od verbálnej ku grafickej a symbolickej reprezentácii po častiach lineárnych funkcií a použijete ich na modelovanie situácií.